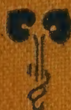
ÉMILE BOREL

ARITHMÉTIQUE

1er Cycle



Librairie Armand Colin.

COURS DE MATHÉMATIQUES
RÉDIGÉ CONFORMÉMENT AUX NOUVEAUX PROGRAMMES
(27 juillet 1905)

Arithmétique

PREMIER CYCLE

PAR

ÉMILE BOREL

Professeur à la Sorbonne
Sous-Directeur de l'École Normale Supérieure



Librairie Armand Colin
103, Boulevard Saint-Michel, PARIS
1919

4e *Édition*

ARITHMÉTIQUE

Classe de Cinquième B.

Numération décimale.

Addition et soustraction des nombres entiers.

Multiplication des nombres entiers. Produit d'une somme ou d'une différence par un nombre. Produit de facteurs. Puissances.

Division des nombres entiers. Règle pratique.

Caractères de divisibilité par 2, 5, 9, 3.

Nombres premiers. Règles pratiques pour la décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers, pour la recherche du plus grand commun diviseur, du plus petit commun multiple.

Revision du système métrique.

Classe de Quatrième B.

Fractions ordinaires. Opérations.

Fractions décimales. Grandeurs directement et inversement proportionnelles. Opérations sur les nombres décimaux.

Règle pratique pour l'extraction de la racine carrée d'un nombre entier ou décimal à moins d'une unité décimale d'un ordre donné.

Progressions arithmétiques et géométriques. Somme des termes des progressions limitées.

Méthodes commerciales du calcul de l'intérêt et de l'escompte. Bordereaux d'escompte. Comptes courants. Notions sommaires sur les valeurs.

Classe de Quatrième A.

Produit d'une somme ou d'une différence par un nombre. Produit de facteurs. Puissance.

Caractères de divisibilité par 2, 5, 9, 3.

Nombres premiers. Règles pratiques pour la décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers, pour la recherche du p. g. c. d., du p. p. c. m.

Proportions. Exercices sur le système métrique, les fractions et les grandeurs directement et inversement proportionnelles. Règle pratique pour l'extraction de la racine carrée d'un nombre entier ou décimal à moins d'une unité décimale d'un ordre donné.

Classe de Troisième A.

Exercices sur le système métrique et les grandeurs directement et inversement proportionnelles.

PRÉFACE

Les classes auxquelles ce livre est destiné sont les premières dans lesquelles figure un programme d'*Arithmétique;* jusque-là, il n'était question que de *Calcul;* l'enseignement cesse d'être exclusivement pratique et commence à devenir théorique; cette transformation doit s'accomplir avec prudence; il serait très dangereux de donner à ces jeunes élèves un enseignement exclusivement théorique.

Cet ouvrage est donc un *premier livre d'Arithmétique;* cela ne signifie pas qu'il s'adresse à des enfants qui ne savent pas compter; pas plus qu'un premier livre de grammaire ne peut s'adresser à des enfants qui ne sauraient point encore parler. Il y a, assurément, un grand intérêt philosophique à reprendre l'exposition des notions premières en supposant chez le lecteur l'ignorance complète; mais cette fiction

exige un lecteur plus instruit que ceux auxquels s'adresse ce livre. Je suis persuadé que les méthodes d'enseignement dans lesquelles on feint de croire que les enfants ignorent complètement des choses qu'ils croient connaître très bien (et que, en fait, ils connaissent assez bien), ont le plus souvent pour résultat de leur faire regarder la science comme une construction purement artificielle, ce qui est le plus mauvais service qu'on puisse leur rendre.

Aussi ai-je tâché de me placer le plus possible en face de la réalité; je n'ai pas cru, par exemple, que la numération dût consister à apprendre à compter à un enfant qui ne saurait pas; mais à montrer à celui qui sait le détail du mécanisme qu'il utilise depuis longtemps.

J'ai tâché aussi de donner aux exemples concrets et aux notions concrètes le plus de place possible : de nombreux exercices exigent la connaissance du système métrique.

J'ai agi de même pour les notions sur les calculs pratiques usités dans la banque et le commerce, introduites dans les nouveaux programmes.

J'ai toutefois tenu compte de l'indication donnée par les auteurs des programmes; en supprimant le programme spécial de comptabilité, ils ont voulu laisser de côté tout ce qui n'est que *pratique commerciale;* les élèves l'apprendront dans des Écoles de commerce, ou

par l'exemple, s'ils débutent très jeunes; dans ce dernier cas, des notions forcément incomplètes ne pourraient que les gêner, vu le nombre et la variété des usages commerciaux.

La lecture des belles *Leçons d'Arithmétique* de M. Jules Tannery m'a été fort utile, ainsi que le souvenir de l'enseignement de ce Maître; il va sans dire que l'Arithmétique de M. Tannery et la mienne, s'adressant à des élèves d'âges très différents, doivent nécessairement différer en bien des points d'une manière essentielle.

Je me suis strictement limité au programme; j'espère avoir été aussi bref que possible, tout en étant complet; je serai reconnaissant à tous ceux qui voudront bien me signaler les imperfections de cette Arithmétique et les améliorations à y introduire.

ÉMILE BOREL.

15 Septembre 1906.

ARITHMÉTIQUE

CHAPITRE I

NUMÉRATION DÉCIMALE

1. — Le but de la numération est d'apprendre à nommer et à écrire les nombres; on distingue quelquefois la *numération parlée* et la *numération écrite;* mais il y a avantage à les exposer simultanément. Les nombres dont nous parlons ici sont les *nombres entiers;* il sera question plus loin de *nombres fractionnaires et de nombres décimaux;* mais lorsque nous parlerons de nombres sans épithète, il sera toujours entendu qu'il s'agit de nombres entiers.

On acquiert la notion de nombre entier lorsqu'on cherche à compter des objets; il existe, paraît-il, des peuplades sauvages qui connaissent la signification des mots un, deux, trois, quatre (c'est-à-dire des mots correspondants de leur langue) et qui, lorsque le nombre des animaux d'un troupeau, par exemple, dépasse quatre, disent simplement qu'il y en a *beaucoup*. Les peuples civilisés ont

depuis longtemps reconnu la nécessité de désigner d'une manière plus précise le nombre d'objets d'une collection; le procédé qui est de beaucoup le plus répandu est celui de la numération *décimale*[1].

On commence par créer dix caractères ou chiffres :

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

auxquels on a donné des noms qu'il est inutile de rappeler; le chiffre 0 indique qu'il n'y a *aucun* objet; le chiffre 1 qu'il y a *un seul* objet; dans ces deux cas, il n'y a pas, à proprement parler, de *collection*.

2. — Soit maintenant proposé de compter le nombre de moutons d'un troupeau; voici comment on pourra procéder : on fera passer tous les moutons devant une personne qui, chaque fois qu'un mouton passera, fera un trait sur son carnet; lorsqu'il y aura *dix* traits sur une ligne, le pointeur passera à la ligne suivante et obtiendra ainsi, par exemple, les traits suivants :

```
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | |
```

On voit qu'il y a trois lignes de dix traits, et quatre traits sur une ligne inachevée ; on désigne ce nombre par trente-quatre, que l'on écrit 34. On dit que ce nombre est composé de 3 dizaines et de 4 unités.

1. Ce procédé n'est d'ailleurs pas le seul; bien des commerçants conservent l'ancienne habitude de compter par douzaines, et même par douzaines de douzaines ou *grosses*.

Dans le cas où il y a plus de 9 lignes de dix traits, il sera nécessaire de grouper ces lignes dix par dix; chaque groupe de dix lignes de dix constitue une centaine; de même, s'il y a plus de dix *centaines*, on les groupe dix par dix et chaque groupe de dix s'appelle un *mille*, etc.

Si l'on a 4 mille, 5 centaines, 3 dizaines et 2 unités, on écrit 4 532 et on énonce : quatre mille cinq cent trente-deux. Le chiffre 2 désigne des unités ordinaires ou du *premier ordre*, le chiffre 3 des dizaines ou *unités du second ordre;* le chiffre 5 des centaines ou *unités du troisième ordre*, etc. Lorsqu'il n'y a pas d'unités d'un certain ordre, on indique cette absence par le chiffre *zéro* (0); de cette manière les autres chiffres conservent leur rang; ainsi on écrit 508, pour indiquer 5 centaines et 8 unités, car 58 désignerait 5 dizaines et 8 unités.

Le chiffre 0 n'intervient donc que pour fixer le rang des autres chiffres; pour cette raison, les chiffres autres que 0 sont appelés *chiffres significatifs;* car ils signifient par eux-mêmes un certain nombre d'unités d'un certain ordre.

On peut énoncer de la manière suivante la convention fondamentale de la numération écrite.

Convention fondamentale. — *Tout chiffre placé à la gauche d'un autre exprime des unités d'ordre immédiatement supérieur, c'est-à-dire formées par la réunion de dix unités de l'ordre exprimé par ce chiffre. De plus le premier chiffre à droite représente des unités simples.*

3. — Il importe de remarquer que ce système :

1° Permet d'écrire tous les nombres;

2° Conduit toujours à la même écriture pour le

même nombre ou pour des nombres égaux, et à des écritures différentes pour des nombres inégaux.

4. — Le système de numération décimale permet d'écrire tous les nombres. En effet, quelque grand que soit un nombre, par exemple le nombre de grains de sable d'une plage, on conçoit qu'il soit possible de classer ses unités dix par dix; on obtient ainsi un certain nombre de dizaines, et des unités restantes en nombre inférieur à dix. On peut de même grouper les dizaines dix par dix comme nous l'avons expliqué, et ainsi de suite, et ces opérations ne peuvent pas se poursuivre sans fin, puisque l'on a chaque fois des unités d'ordre plus élevé, c'est-à-dire des collections de plus en plus étendues; il y en a donc de moins en moins, et il arrive un moment où l'on a moins de 10; l'opération s'arrête alors d'elle-même et, d'après ses résultats, on sait écrire le nombre dans le système décimal.

5. — *On dit que deux nombres sont égaux lorsque l'on peut faire correspondre leurs unités une à une, de manière qu'à chaque unité de l'un corresponde une seule unité de l'autre, et inversement.* Par exemple, nous disons que le nombre de sous que possède Paul est égal au nombre de billes que possède Pierre, s'il est possible de ranger sur la table, en file, les sous de Paul, et, à côté, les billes de Pierre, de manière que vis-à-vis de chaque sou il y ait une bille, et vis-à-vis de chaque bille, un sou. De même, nous disons que le nombre des encriers qu'il y a dans la classe est égal au nombre des élèves, s'il est possible de s'arranger de manière que chaque élève ait un encrier et un seul et que chaque encrier serve à un élève et à un seul.

Si, au contraire, on peut s'arranger de manière que chaque élève ait un encrier, mais qu'il reste des encriers, on dira que le nombre des encriers est *supérieur au* nombre des élèves ou *plus grand que* ce nombre; le nombre des élèves est *inférieur au* nombre des encriers, ou *plus petit que* lui.

Nous admettons comme un axiome (ou notion évidente) que, étant donnés deux nombres, ou bien ils sont égaux, ou bien le premier est plus grand que le second, ou bien le second plus grand que le premier. Par exemple, ou bien il y a autant d'encriers que d'élèves, ou bien il y a plus d'encriers que d'élèves, ou bien il y a plus d'élèves que d'encriers. Il faut se rendre compte que cet axiome signifie ceci : si, en distribuant d'une certaine manière les encriers aux élèves, on n'a pas pu en avoir un pour chacun, il n'est pas possible que, en s'y prenant autrement, on en ait un pour chacun, ni qu'il y en ait de reste. C'est l'*axiome du nombre*.

Lorsqu'on en a bien compris la signification, il est aisé de démontrer que deux nombres égaux seront toujours représentés par les mêmes signes, dans la numération décimale, et deux nombres inégaux par des signes différents.

En effet, pour compter deux nombres égaux, nous pourrons, comme tout à l'heure, faire correspondre des traits aux unités de l'un d'eux; comme ces nombres sont égaux, on a les mêmes traits pour ces deux nombres. Par exemple, si chaque élève de la classe a devant lui son encrier, il reviendra au même de compter les élèves ou de compter les encriers. Le nombre des traits est égal au nombre des objets que l'on compte d'après

la définition de l'égalité, puisque à chaque trait correspond un objet, et à chaque objet, un trait. De plus, il résulte de l'*axiome du nombre* que, quelle que soit la manière dont on compte, c'est-à-dire dont on établisse la correspondance, le nombre des traits du tableau sera égal au nombre des objets; en d'autres termes, *on trouve toujours le même tableau de traits*, c'est-à-dire le même nombre d'unités, de dizaines, de centaines, etc.

Au contraire, si deux nombres sont inégaux, il leur correspondra des tableaux différents, et par suite des écritures différentes.

En résumé, nous utilisons : 1° l'axiome du nombre, d'où l'on conclut qu'à un même nombre ou à deux nombres égaux correspond un même tableau de traits, et qu'à un même tableau de traits correspondent deux nombres égaux; 2° le fait qu'à un tableau déterminé de traits correspond, d'après sa structure même, une écriture déterminée dans le système décimal.

6. — Il est très important de savoir reconnaître, étant donnés deux nombres écrits dans le système décimal, lequel des deux est le plus grand. On peut énoncer à ce sujet la règle suivante, que la considération des tableaux de traits permettrait de démontrer, mais sur laquelle nous ne nous attardons pas.

Règle. — *Étant donnés deux nombres écrits dans le système décimal, s'ils n'ont pas le même nombre de chiffres, le plus grand est celui qui a le plus de chiffres; s'ils ont le même nombre de chiffres, le plus grand est celui dont le chiffre de gauche est le plus élevé; si ces chiffres de gauche sont identiques, le*

plus grand est celui pour lequel le chiffre suivant est le plus élevé; si les chiffres suivants sont encore égaux, on considère les suivants, etc. Si tous les chiffres étaient égaux, les nombres seraient égaux.

7. — On emploie le signe = (*égale*) pour exprimer l'égalité de deux nombres ; le signe ≠ (*différent de*) pour indiquer que deux nombres sont inégaux, les signes > (*plus grand que* ou *supérieur à*) et < (*plus petit que* ou *inférieur à*) pour indiquer que l'un est plus grand que l'autre, l'ouverture du signe étant toujours tournée vers le plus grand. Ainsi, l'on écrit

$$145 = 145$$
$$143 \neq 138$$
$$107 < 110$$
$$2\,350 > 998$$
$$2\,402 > 2\,399$$
$$3 < 5$$
$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 < 10 < \ldots$$

La suite 0, 1, 2, 3, 4,... des nombres entiers rangés par ordre croissant, sans en oublier, s'appelle *la suite naturelle des nombres entiers*.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE I

Les exercices sur la numération exigent la connaissance des quatre opérations; sans cette connaissance la numération ne fournit qu'un moyen empirique de compter et d'écrire les nombres (au moyen de tableaux de traits). Aussi trouvera-t-on plus loin, après la théorie des quatre opérations, les exercices sur la numération : tels sont, en particulier, les exercices nos 30, 31, 37, 38, 39.

CHAPITRE II

ADDITION ET SOUSTRACTION

I. ADDITION

8. **Définition et propriétés.** — Voici des billes dans un premier sac, et d'autres billes dans un second sac; si nous les mettons toutes dans un troisième sac, nous disons que le nombre des billes qui se trouveront dans ce troisième sac est *la somme* des nombres des billes qui se trouvaient dans les deux premiers sacs. L'*addition* est l'opération qui a pour but de trouver la somme de deux (ou plusieurs) nombres connaissant ces nombres. D'une manière plus précise, les nombres donnés étant écrits dans le système décimal, on demande d'écrire leur somme dans ce système.

Nous énoncerons d'abord, relativement à l'addition, plusieurs propositions qui sont une conséquence de *l'axiome du nombre* et que des exemples concrets rendent intuitives.

La somme de plusieurs nombres ne dépend pas de leur ordre. Voici cinq sacs de billes; et voici

un tiroir; je vide dans le tiroir successivement les cinq sacs; le nombre de billes qui sera finalement contenu dans le tiroir sera le même, quel que soit l'ordre dans lequel on a fait la somme.

De plus, il est indifférent de réunir plusieurs sacs en un seul, et d'ajouter leur somme au lieu de les ajouter successivement.

Théorème. — *On ne change pas la valeur de la somme de plusieurs nombres en remplaçant plusieurs d'entre eux par leur somme; ou inversement, en décomposant l'un d'eux en une somme, et le remplaçant par les diverses parties de cette somme.*

Si l'on emploie des parenthèses pour indiquer que les opérations indiquées à l'intérieur de la parenthèse doivent être effectuées avant celles qui portent sur la parenthèse, ces propositions seront exprimées par des égalités telles que les suivantes :

$$3+2+4+1=(3+2)+(4+1)=5+5,$$
$$5+6=(2+3)+(4+2)=2+3+4+2.$$

Par exemple, Paul, Pierre, Jacques et Jean veulent réunir tous les sous qu'ils possèdent pour un achat commun; ils peuvent remettre tout leur argent à l'un deux, par exemple à Paul; ou bien Pierre peut remettre ses sous à Paul et Jacques les siens à Jean, Jean remettant ensuite à Paul tout ce qu'il a. L'un d'eux, Pierre, pourrait aussi mettre ses sous dans 3 poches différentes, et donner successivement ce qu'il y a dans ces diverses poches; le résultat final serait le même.

Ces diverses remarques sont tellement évidentes qu'on pourrait être tenté de les juger inutiles; mais il ne faut pas perdre de vue que toutes les mathé-

matiques sont des conséquences (plus ou moins lointaines) de remarques aussi évidentes que celles-là. Et il est tout à fait essentiel qu'il n'y ait aucun doute dans l'esprit sur le point de départ, afin que les conséquences apparaissent comme tout à fait certaines.

On exprime les propriétés que nous venons de reconnaître à l'addition en disant que c'est une opération *commutative* et *associative;* on entend par là que l'on peut *permuter* les nombres que l'on additionne ou les *associer* entre eux d'une manière quelconque, sans changer le résultat final.

9. **Cas particuliers.** — Soit d'abord à ajouter deux nombres d'un seul chiffre, par exemple 7 et 5. On indiquera cette opération comme il suit $7+5$. Pour ajouter 5 à 7 il suffit, d'après une remarque faite, d'ajouter à 7 successivement chacune des unités de 5; c'est-à-dire d'ajouter 5 fois de suite une unité; on peut former le tableau suivant :

	1	2	3	4	5
7	8	9	10	11	12

en ajoutant 1 unité, on obtient 8; et en ajoutant 2 on obtient 9, etc.; et en ajoutant 5 on obtient 12. C'est à cela que revient le procédé connu sous le nom de *compter sur ses doigts*. En pratique, on doit connaître le résultat que l'on obtient en ajoutant deux nombres d'un seul chiffre; la mémoire doit le fournir sans hésitation.

Soit maintenant à ajouter deux nombres formés chacun d'un seul chiffre significatif suivi d'un même nombre de zéros; par exemple 30 et 40, ou 400 et 700, ou 6 000 et 9 000. Pour ajouter 30 et 40, on

remarquera que 30 désigne 3 dizaines et que 40 désigne 4 dizaines; si on réunit les groupes de traits qui figurent ces nombres, on obtient visiblement 7 dizaines, ce qui s'écrit 70. Ainsi, on ajoute les chiffres des dizaines, sans tenir compte du zéro que l'on transcrit. On a de même :

$$200 + 300 = 500$$
$$30\,000 + 60\,000 = 90\,000.$$

La règle est un peu moins simple dans le cas où la somme des deux chiffres significatifs est égale ou supérieure à 10; soient, par exemple, les nombres 600 et 700; si nous les figurons par des groupes de traits, nous aurons 6 centaines et 7 centaines, si nous les réunissons, nous obtenons plus de 10 centaines; d'après le principe même de la numération décimale, nous devons grouper 10 centaines de manière à former une unité d'ordre supérieur, ou mille, et il reste encore 3 centaines; la somme s'écrit donc 1 300; on voit qu'elle s'obtient encore en ajoutant les chiffres significatifs sans tenir compte des zéros et en transcrivant ces zéros à la droite du nombre obtenu. On a de même :

$$3\,000 + 8\,000 = 11\,000$$
$$50\,000 + 60\,000 = 110\,000$$
$$300 + 700 = 1\,000.$$

Proposons-nous, enfin, comme dernier cas particulier, d'ajouter ensemble plusieurs nombres, dont chacun est formé d'un chiffre significatif suivi de zéros, ces zéros étant en nombres différents pour

les divers nombres donnés. Soit, par exemple, à effectuer l'addition suivante :

$$40 + 5 + 300 + 60\,000 + 8\,000.$$

Il suffit de se rapporter à la signification de chacun de ces nombres pour voir que leur réunion forme un nombre que l'on sait immédiatement écrire dans le système décimal; il y a, en effet, 5 unités, 4 dizaines, 3 centaines, 8 mille, 6 dizaines de mille; la somme est donc 68 345. On aurait de même :

$$400 + 6 + 3\,000 = 3\,406$$
$$50 + 30\,000 = 30\,050$$
$$500 + 60\,000 + 8 = 60\,508.$$

Réciproquement, tout nombre écrit dans le système décimal peut être regardé comme la somme d'autant de nombres qu'il a de chiffres significatifs, chacun de ces nombres étant formé par un seul des chiffres significatifs, suivi d'autant de zéros qu'il est suivi de chiffres dans le nombre donné. Ainsi l'on a :

$$6\,854 = 6\,000 + 800 + 50 + 4.$$

On regarde quelquefois cette remarque comme faisant partie de la numération; elle en est évidemment un complément essentiel; mais elle n'est pas indispensable : on peut très bien concevoir que l'on sache compter empiriquement jusqu'à 100, que l'on connaisse donc le sens des mots *quarante-six*, *quarante*, *six*, que l'on connaisse aussi les écritures correspondantes, 46, 40, 6 et que l'on n'ait pas remarqué que $46 = 40 + 6$.

10. **Cas général.** — Soit maintenant à additionner deux nombres quelconques, par exemple 2 317 et 541 ; nous allons ramener cette addition aux cas déjà traités ; pour cela nous remarquerons que l'on a :

$$2\,317 = 2\,000 + 300 + 10 + 7$$
$$541 = 500 + 40 + 1.$$

Pour ajouter ces deux nombres, il revient au même d'ajouter les diverses parties des sommes qui leur sont égales ; et comme la valeur d'une somme ne dépend pas de l'ordre des parties, nous pourrons écrire successivement :

$$2\,317 + 541 = 2\,000 + 300 + 10 + 7 + 500 + 40 + 1$$
$$2\,317 + 541 = 2\,000 + 300 + 500 + 10 + 40 + 7 + 1.$$

Nous avons d'ailleurs :

$$300 + 500 = 800$$
$$10 + 40 = 50$$
$$7 + 1 = 8;$$

de sorte que nous pouvons écrire en remplaçant des termes de la somme par leur somme effectuée :

$$2\,317 + 541 = 2\,000 + 800 + 50 + 8 = 2\,858.$$

Pratiquement, il est inutile de faire cette décomposition, suivie de la recomposition inverse ; on dispose les nombres l'un au-dessous de l'autre, de manière que les chiffres de même rang se correspondent :

$$\begin{array}{r} 2\,317 \\ 541 \\ \hline 2\,858 \end{array}$$

et il suffit d'additionner les chiffres qui se trouvent dans une même colonne, et d'inscrire la somme au-dessous de cette colonne, pour obtenir le résultat. La marche que nous avons suivie nous conduit donc à la règle pratique bien connue, qui se trouve ainsi démontrée.

Dans l'exemple que nous avons choisi, la somme des chiffres de même rang était toujours inférieure à 10.

La règle est, comme on sait, un peu moins simple lorsqu'il n'en est pas ainsi ; mais il est aussi aisé de la justifier.

Soit, par exemple, à ajouter les nombres 345, 456 et 527 ; on aura :

$$345 = 300 + 40 + 5$$
$$456 = 400 + 50 + 6$$
$$527 = 500 + 20 + 7 ;$$

et l'on aura :

$$345 + 456 + 527$$
$$= 300 + 400 + 500 + 40 + 50 + 20 + 5 + 6 + 7.$$

Or, on a :

$$5 + 6 + 7 = 18 = 10 + 8.$$

On pourra donc écrire, en remplaçant $5 + 6 + 7$ par $10 + 8$:

$$345 + 456 + 527 = 300 + 400 + 500 + 40 + 50 + 20 + 10 + 8$$

On voit qu'aux dizaines $40 + 50 + 20$ qui provenaient des nombres donnés vient s'ajouter le nombre 10 qui provient de l'addition des unités ; le chiffre 1 est ce qu'on appelle *la retenue*. On aura de même :

$$40 + 50 + 20 + 10 = 120 = 100 + 20 ;$$

donc :

$$345 + 456 + 527 = 300 + 400 + 500 + 100 + 20 + 8.$$

Or,

$$300 + 400 + 500 + 100 = 1\,300;$$

on a donc finalement :

$$345 + 456 + 527 = 1\,300 + 20 + 8 = 1\,328.$$

Pratiquement, on suit la règle suivante.

Règle. — *Pour additionner plusieurs nombres entiers, on les écrit au-dessous les uns des autres de manière que les chiffres représentant des unités du même ordre soient dans une même colonne verticale; on additionne mentalement les chiffres situés dans la colonne de droite, et on inscrit au-dessous le résultat, lorsqu'il est inférieur à 10; s'il est supérieur à 10, on inscrit le chiffre des unités, et on retient le nombre des dizaines. On ajoute successivement à ce nombre retenu les divers chiffres de la colonne des dizaines, et on procède de la même manière que pour la colonne précédente; on continue de même jusqu'à ce que l'on ait épuisé toutes les colonnes; au bas de la dernière colonne, on inscrit le dernier total, qu'il soit ou non inférieur à 10. Le nombre formé par les chiffres inscrits est la somme cherchée.*

Par exemple, dans l'exemple que nous avons choisi, on dispose l'opération comme il suit :

$$\begin{array}{r} 345 \\ 456 \\ 527 \\ \hline 1\,328 \end{array}$$

et l'on dira : 5 et 6, 11 et 7, 18; je pose 8 et retiens 1; 1 et 4, 5 et 5, 10 et 2, 12; je pose 2 et retiens 1; 1 et 3, 4 et 4, 8, et 5, 13; et l'on écrira 13.

11. **Remarque fondamentale.** — Lorsque l'on additionne des nombres concrets, c'est-à-dire des nombres représentant des objets ou des grandeurs, il faut avoir soin de s'enquérir de leur nature, si ce sont des objets, ou de l'unité choisie, si ce sont des grandeurs. On n'ajoutera que des nombres représentant des objets de même nature ou des grandeurs de même espèce mesurées avec la même unité.

Il faut d'ailleurs observer que les mots *objets de même nature* n'ont pas un sens absolu; on peut par exemple, se poser le problème suivant : un fermier a 4 chevaux, 6 bœufs et 50 moutons, combien a-t-il de têtes de bétail? La remarque relative aux *unités* est plus importante; si, par exemple, on demande quelle est l'étendue d'une propriété, sachant qu'il y a 3 hectares de prés et 8 ares de jardin, on ne devra pas répondre 11 ares, ni hectares; mais remarquer que 3 hectares équivalent à 300 ares, qui ajoutés aux 8 ares, font 308 ares. De même, si à 3 kilogrammes, on ajoute 50 grammes, on obtient 3050 grammes, et non pas 53 grammes, ni kilogrammes.

II. SOUSTRACTION

12. **Définition et propriétés.** — Retrancher d'une collection donnée un certain nombre d'objets, c'est considérer la collection obtenue lorsqu'on supprime ce nombre d'objets. Cette opération s'appelle *sous-*

traction. Ainsi, j'ai 9fr; on m'en prend 4; il m'en reste 5; on a soustrait 4 de 9, le résultat de la soustraction ou *différence* est 5. On exprime ce fait en écrivant $9-5=4$. Il est clair que si, après avoir soustrait un certain nombre d'objets à une collection, on ajoute les mêmes objets, ou des objets semblables en même nombre, on retrouve la collection primitive. Ainsi, si l'on me rend les 5fr que l'on m'a pris, j'en ai de nouveau 9; 9 est la somme de 4 et de 5, d'où cette nouvelle définition de la soustraction :

DÉFINITION. — *La soustraction est une opération qui a pour but, étant donnés deux nombres, d'en trouver un troisième qui, ajouté au second, fournisse une somme égale au premier.*

Pour que la soustraction soit possible, il faut que le second nombre (nombre que l'on retranche) soit inférieur ou égal au premier (nombre duquel on retranche). Si je n'ai que 9fr, on ne peut pas m'en prendre 12, si l'on m'en prend 9 il ne me reste rien : *la différence de deux nombres égaux est égale à zéro.*

La définition de la soustraction et l'axiome du nombre entraînent un certain nombre de propriétés qu'il est important de connaître.

THÉORÈME I. — *Pour retrancher une somme d'un nombre, il suffit de retrancher successivement les diverses parties de la somme.*

Ainsi de 9 je veux retrancher $5=2+3$; il revient au même de dire $9-5=4$ ou de dire $9-2=7$ et $7-3=4$; si j'ai 9fr, et que je veuille en donner 2 à Jacques et 3 à Jean, le résultat sera le même, que je les leur donne successivement, ou que je donne

les 5^{fr} à Pierre en le chargeant de les leur distribuer. Cette propriété s'exprime par l'écriture suivante :

$$9-(2+3)=9-2-3,$$

la parenthèse employée dans le premier membre signifiant que l'on doit effectuer l'addition $2+3$ indiquée à l'intérieur de cette parenthèse, *avant* la soustraction indiquée par le signe — placé devant la parenthèse.

THÉORÈME II. — *Pour ajouter la différence de deux nombres, il suffit d'ajouter le premier et de retrancher le second* (le premier est toujours celui duquel l'on retranche).

J'ai 3^{fr}, et l'on doit me donner 5^{fr}, moins 2^{fr}; on peut procéder de deux manières ; ou bien me donner la différence $5-2$, c'est-à-dire 3^{fr}, ou bien me donner 5^{fr} et me demander de rendre 2^{fr}; qu'on emploie un moyen ou l'autre, je ne serai ni plus ni moins riche. Cette propriété se traduit par l'égalité

$$3+(5-2)=3+5-2.$$

THÉORÈME III. — *Pour retrancher la différence de deux nombres, il suffit de retrancher le premier et d'ajouter le second* (lorsque la soustraction est possible).

J'ai 6^{fr} et je dois 3^{fr}; si j'ai de la petite monnaie, je puis payer ces 3^{fr}, et il me reste 3^{fr}; si je n'ai qu'une pièce de 5^{fr}, je puis la donner et demander qu'on me rende 2^{fr}; le résultat final est le même ; au lieu de donner directement $5-2$, j'ai donné 5 et reçu 2. Cette propriété s'exprimera par l'écriture suivante :

$$6-(5-2)=6-5+2.$$

Si je n'avais eu que 4^{fr}, il est clair que pour payer 3^{fr}, je n'aurais pas pu en donner 5 et m'en faire rendre 2, la soustraction $4 - 5$ ne serait pas possible. On reviendra sur ce point dans la théorie des nombres négatifs en Algèbre.

THÉORÈME IV. — *Dans la somme et la différence indiquée de plusieurs nombres, on peut intervertir d'une manière quelconque l'ordre des opérations, pourvu que les soustractions soient possibles. On peut aussi remplacer plusieurs termes consécutifs par leur valeur effectuée.*

J'ai 6^{fr}; je dois en recevoir 3 de Jacques et 1 de Jean; en payer 4 à Paul et 2 à Pierre; quel que soit l'ordre dans lequel se feront ces diverses opérations, le résultat final sera le même. Si je paye Paul, j'aurai $6 - 4$; si ensuite Jacques me paye, j'aurai $6 - 4 + 3$; si je paye Pierre, j'aurai $6 - 4 + 3 - 2$; ou enfin, quand Jean m'aura payé, j'aurai $6 - 4 + 3 - 2 + 1$ si j'avais, au contraire, réglé successivement avec Pierre, Jacques, Jean et Paul, j'aurais eu $6 - 2 + 3 + 1 - 4$; on a :

$$6 - 4 + 3 - 2 + 1 = 6 - 2 + 3 + 1 - 4$$

les opérations étant possibles dans l'ordre dans lequel elles sont indiquées; il est clair que si j'ai 2^{fr}, que je doive en recevoir 5 et en payer 6, je ne puis pas payer avant d'avoir reçu. On reviendra sur ce point dans la théorie des nombres négatifs en Algèbre.

THÉORÈME V. — *On ne change pas la différence de deux nombres, en ajoutant ou retranchant un même nombre de chacun d'eux.* Cette proposition

peut être regardée comme un corollaire immédiat des précédentes; à cause de son importance, il n'est pas inutile de l'énoncer et d'y réfléchir séparément. J'ai 6^{fr} et je dois en payer 4; on me donne 3^{fr}, à condition que j'en paye 3 de plus; cela ne change rien à ma situation; on peut donc écrire :

$$6 - 4 = 6 + 3 - (4 + 3) = 9 - 7.$$

De même, j'ai 9^{fr} et je dois en payer 7 demain; je donne 3^{fr} aujourd'hui, mais à condition de payer 3^{fr} de moins demain; ma situation n'est pas modifiée; on écrira :

$$9 - 7 = 9 - 3 - (7 - 3) = 6 - 4.$$

13. **Cas particuliers.** — Le cas particulier le plus simple de la soustraction est celui où le nombre que l'on retranche et le nombre cherché n'ont chacun qu'un chiffre. Dans ce cas, on doit connaître immédiatement la différence, comme nous l'avons dit à propos de l'addition. Si on ne la connaissait pas, un moyen de la trouver serait de se reporter à la définition de la soustraction, comme opération inverse de l'addition; soit par exemple à retrancher 8 de 14; il s'agit de savoir quel nombre ajouté à 8, donnera pour somme 14; il suffit d'écrire le tableau suivant :

8	9	10	11	12	13	14
	1	2	3	4	5	6

pour constater que ce nombre est 6. Ce que l'on appelle compter sur ses doigts revient, en fait, à ce procédé.

Un cas presque aussi simple est celui où le

nombre que l'on retranche et le nombre cherché sont formés tous deux d'un seul chiffre significatif, suivi d'un même nombre de zéros; la règle du cas particulier correspondant de l'addition fournit de suite le résultat; on a ainsi :

$$900 - 600 = 300$$
$$12\,000 - 9\,000 = 3\,000$$
$$150 - 80 = 70.$$

14. **Cas général**. — Soit à retrancher 2 436 de 5 839; on écrira :

$$5\,839 = 5\,000 + 800 + 30 + 9$$
$$2\,436 = 2\,000 + 400 + 30 + 6,$$

d'où en appliquant les théorèmes I et IV :

$$\begin{aligned} 5\,839 - 2\,436 &= 5\,000 + 800 + 30 + 9 - 2\,000 - 400 - 30 - 6 \\ &= 5\,000 - 2\,000 + 800 - 400 + 30 - 30 + 9 - 6 \\ &= 3\,000 + 400 + 0 + 3 \\ &= 3\,403. \end{aligned}$$

Pratiquement, on dispose l'opération comme il suit :

$$\begin{array}{r} 5\,839 \\ 2\,436 \\ \hline 3\,403 \end{array}$$

il suffit de retrancher chaque chiffre de celui qui est écrit au-dessus; on voit que les opérations sont bien celles auxquelles conduit la décomposition que nous avons effectuée.

Il se trouve, dans l'exemple choisi, que chaque soustraction partielle est possible; proposons-nous de retrancher 345 de 622; si nous écrivons :

$$622 - 345 = 600 - 300 + 20 - 40 + 2 - 5,$$

nous constatons que nous ne pouvons pas retrancher 5 de 2, ni 40 de 10. On évite cette difficulté en utilisant le théorème V on peut écrire :

$$\begin{aligned} 622 - 345 &= 622 + 100 + 10 - (345 + 100 + 10) \\ &= 600 - 300 - 100 + 100 + 20 - 40 - 10 \\ &\qquad + 10 + 2 - 5 \\ &= 600 - 400 + 120 - 50 + 12 - 5 \\ &= 200 + 70 + 7 \\ &= 277. \end{aligned}$$

Pratiquement on procède comme il suit, on écrit le nombre à retrancher sous l'autre, en faisant correspondre les unités de même ordre, comme ceci :

$$\begin{array}{r} 622 \\ 345 \\ \hline 7 \end{array}$$

On constate que l'on ne peut retrancher 5 de 2, on retranche 5 de 12, ce qui donne 7; on a ainsi ajouté 10 à 622; on ajoute donc 10 à 345, c'est-à-dire que l'on retranchera, dans la seconde colonne, 5, au lieu de retrancher 4.

On peut présenter d'une manière plus simple la théorie et la soustraction, en la regardant comme l'opération inverse de l'addition. Pour bien faire comprendre ce point de vue, adoptons, pour un instant, la disposition suivante, au lieu de la disposition usuelle :

$$\begin{array}{r} 345 \\ \dots \\ \hline 622 \end{array}$$

Regardons 622 comme la somme de 345 et d'un nombre inconnu que nous avons représenté par 3 points. Si nous faisons par la pensée l'addition, il est clair que nous ne pourrons obtenir le chiffre 2 dans la colonne des unités, que s'il y a une retenue; sinon nous aurions 5, 6, 7, 8 ou 9. Nous savons, ayant présentes à l'esprit les sommes des dix premiers nombres, qu'il faut, pour obtenir 12, écrire 7 au-dessous de 5 et nous disons : 7 et 5, 12, je pose 2 et retiens 1 :

$$\begin{array}{r} 345 \\ \cdot\cdot 7 \\ \hline 622 \end{array}$$

nous écrirons donc 7 à la place du premier point. Nous disons ensuite 1 de retenue et 4, 5, et 7, 12, (et nous récrirons le chiffre 7 au moment où nous le prononçons), je pose 2 et retiens 1 :

$$\begin{array}{r} 345 \\ \cdot 77 \\ \hline 622 \end{array}$$

Enfin : 1 de retenue et 3, 4, et 2, 6 et nous écrivons le chiffre 2 au moment où nous le prononçons :

$$\begin{array}{r} 345 \\ 277 \\ \hline 622 \end{array}$$

Il est clair que l'on peut procéder aussi comme nous venons de le dire, en adoptant la disposition usuelle. On peut donc énoncer la règle suivante :

RÈGLE. — *Pour effectuer une soustraction, on écrit le nombre à retrancher au-dessous de l'autre, en faisant correspondre les unités de même espèce. On obtient le chiffre des unités de la différence, en retranchant le chiffre des unités de la seconde ligne du chiffre écrit au-dessus; si cette soustraction n'est pas possible, on ajoute 10 au chiffre supérieur, et on a soin d'énoncer que l'on retient 1; on obtient ensuite le chiffre des dizaines de la même manière, en ayant soin d'augmenter de la retenue, s'il y en a, le chiffre à retrancher, et on continue de même tant qu'il y a des chiffres* On peut d'ailleurs employer l'une ou l'autre des formes de langage suivantes :

$$\begin{array}{r} 3\,567 \\ 958 \\ \hline 2\,609 \end{array}$$

dire : 8 ôtés de 17 reste 9 et je retiens 1; 1 et 5, 6 ôtés de 6, 0; 9 ôtés de 15, 6 et je retiens 1; 1 ôté de 3, 2; ou bien dire : 8 et 9, 17 et je retiens 1; 1 et 5, 6 et 0, 6; 9 et 6, 15 et je retiens 1; 1 et 2, 3.

REMARQUE IMPORTANTE. — Il y a lieu de répéter ici les observations faites à propos de l'addition, au sujet de la nature des objets et des unités de mesure.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE II

1. — La population des divers arrondissements de Paris, en 1861 et 1896, est donnée par le tableau suivant :

N° DE L'ARR.	POPULATION		N° DE L'ARR.	POPULATION	
	en 1861	en 1896		en 1861	en 1896
1	89 519	66 133	11	125 718	222 009
2	81 609	67 167	12	65 748	117 715
3	99 116	87 617	13	56 798	114 711
4	108 520	97 674	14	52 594	122 126
5	107 754	116 113	15	56 041	133 288
6	95 931	100 804	16	36 728	101 577
7	72 965	97 832	17	75 228	182 071
8	69 814	102 110	18	106 356	225 005
9	107 326	119 985	19	76 445	134 128
10	113 571	151 768	20	70 060	151 796

On demande de calculer quelle était la population de Paris en 1861 et en 1896 et de combien elle a augmenté pendant cette période de 35 ans.

2. — Sachant que les arrondissements situés sur la rive gauche sont les 5e, 6e, 7e, 13e, 14e, 15e, on demande de calculer la population de la rive gauche en 1861 et en 1896, et de combien elle a augmenté dans cette période.

3. — Sachant que les arrondissements du centre de Paris sont ceux qui portent les nos de 1 à 11 et les arrondissements de la périphérie ceux qui portent les nos de 12 à 20, on demande de calculer séparément les populations totales des arrondissements du centre, et de la périphérie, en 1861 et 1896, ainsi que leurs augmentations durant cette période.

4. — On demande quel est le poids d'un objet, sachant que l'on a pu établir l'équilibre dans une balance, en plaçant dans un plateau un poids de 1kgr, et dans l'autre : cet objet, 1 poids de 10gr, et 3 poids de 1gr.

5. — Jean possède une propriété de 3 hectares; il vend, pour construire des maisons, 45 mètres carrés à Pierre; 60 mètres carrés à Jacques; 50 mètres carrés à Paul. Que devient la superficie de la propriété de Jean?

6. — On a un tas de sable de 3 mètres cubes; on en retire successivement 15 litres, 6 décalitres, et 9 hectolitres. Quel est le volume du sable restant?

7. — Ajouter $3^h\ 15^m\ 34^s$, $4^h\ 5^m\ 25^s$, $1^h\ 50^m\ 12^s$.

8. — Un père a 5 enfants; le plus jeune a 12 ans, et les autres ont respectivement 4, 6, 9 et 11 ans de plus que lui; quelle est la somme des âges de ces 5 enfants?

9. — Faire les additions suivantes :

$$\begin{array}{r}12\,542 + 9\,999\\ 13\,425 + 9\,998\\ 14\,520 + 99\,997.\end{array}$$

10. — Effectuer les soustractions suivantes :

$$\begin{array}{r}4\,325 - 999\\ 32\,567 - 9\,998\\ 43\,650 - 9\,996.\end{array}$$

11. — Retrancher de 10 000 les nombres suivants : 3 457; 2 994; 3 435; 5 649; 9 834; 8 991.

12. — Utiliser les résultats de l'exercice précédent pour remplacer par des additions les soustractions suivantes :

$$\begin{array}{r}23\,451 - 3\,457\\ 24\,630 - 2\,994\\ 3\,752 - 3\,435\\ 9\,650 - 5\,649\\ 38\,421 - 9\,834\\ 9\,857 - 8\,991.\end{array}$$

On remarquera que l'on a $23\,451 - 3\,457 = 23\,451 + (10\,000 - 3\,457) - 10\,000$, et ainsi de suite.

13. — Soit proposée la suite d'opérations suivantes :

$$23\,457 - 4\,522 + 4\,627 - 9\,643;$$

on peut les remplacer par les suivantes :

$$23\,457 + (10\,000 - 4\,522) + 4\,627 + (10\,000 - 9\,643) - 10\,000 - 10\,000.$$

Les différences $10\,000 - 4\,522$ et $10\,000 - 9\,643$ s'obtiennent aisément et l'on a ainsi seulement à effectuer une addition de 6 nombres et à retrancher ensuite 2 fois 10 000 du résultat. Faire les calculs.

14. — Appliquer la méthode de l'exercice précédent au calcul des expressions suivantes :

$$\begin{array}{l}4\,253 - 245 + 6\,324 - 997 + 12\,645 - 8\,994\\ 2\,634 - 345 + 346\,752 - 98\,649 - 9\,939\\ 4\,675 - 246 + 367\,538 - 89\,698 - 3\,975.\end{array}$$

15. — Montrer que tout nombre inférieur à 121 peut s'obtenir en ajoutant ou retranchant les nombres 1, 3, 9, 27, 81, ou quelques-uns d'entre eux, chacun n'étant pris qu'une seule fois. Par exemple, on a :

$$62 = 81 - 27 + 9 - 1$$
$$14 = 27 - 9 - 3 - 1$$
$$105 = 81 + 27 - 3$$

Exprimer de la manière précédente les nombres compris : 1° entre 30 et 40 ; 2° entre 90 et 100.

CHAPITRE III

MULTIPLICATION DES NOMBRES ENTIERS

I. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS

15. — Voici 4 bourses; chacune d'elles renferme 3 francs; quelle somme totale obtiendra-t-on si on les réunit? Par définition la réponse à cette question est le produit de 3 par 4, que l'on désigne par 3×4; on sait qu'il est égal à 12. Le nombre 3 est dit le *multiplicande;* le nombre 4 le *multiplicateur;* on dit aussi que 3 et 4 sont les deux *facteurs;* 12 s'appelle le *produit*. Si l'on ne connaissait pas le produit de 3 par 4, on pourrait le trouver en observant qu'il suffit d'ajouter 4 nombres égaux à 3; on a :

$$3 \times 4 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12.$$

En effet, dans l'exemple que nous avons choisi, il résulte de la définition même de l'addition qu'on obtient la somme totale en ajoutant les sommes contenues dans les 4 bourses.

On peut procéder d'une manière différente, con-

cevons que l'on prenne d'abord 1 franc dans chaque bourse ; cela donnera 4 francs, puisqu'il y a 4 bourses; si l'on prend une seconde fois 1 franc dans chaque bourse, on aura encore 4 francs, et enfin, si l'on prend une troisième fois 1 franc dans chaque bourse, ce qui les épuise, puisque chacune renfermait 3 francs, on obtient une troisième fois 4 francs; on a donc en tout un nombre de francs égal à

$$4+4+4=12.$$

D'après l'axiome du nombre, le résultat est forcément le même que tout à l'heure. On voit que, pour multiplier 3 par 4 on peut, soit faire la somme de 4 nombres égaux à 3, soit faire la somme de 3 nombres égaux à 4; ce serait la même chose si l'on voulait faire le produit de 4 par 3. D'où cet important théorème :

THÉORÈME. — *Le produit de deux facteurs ne change pas lorsqu'on intervertit l'ordre des facteurs.*

Nous avons défini la multiplication comme une addition abrégée ; il résulte de la définition que le produit de 0 par 4 est la somme $0+0+0+0$, c'est-à-dire 0; le produit de 4 par 0 n'a pas été défini ; on le définira par la condition que le théorème précédent s'applique ; on aura donc :

$$4\times 0=0\times 4=0.$$

Le produit de zéro par un nombre quelconque, ou d'un nombre quelconque par zéro, est égal à zéro.

On peut remarquer que, si aucun des facteurs n'est égal à zéro, le produit n'est pas zéro, car il est égal à une somme de plusieurs nombres égaux,

dont aucun n'est égal à zéro. On peut donc énoncer la remarque précédente sous une forme plus complète et très utile :

Principe. — *Le produit de deux facteurs est nul lorsque l'un des facteurs est nul, et seulement dans ce cas.*

16. **Produit de plusieurs facteurs.** — Soit le produit :

$$2 \times 3 \times 5 \times 4.$$

Par définition, cette écriture signifie que l'on doit multiplier 2 par 3, ce qui donne 6 ; puis 6 par 5, ce qui donne 30, et enfin 30 par 4 ce qui donne 120.

Définition. — *Le produit de plusieurs facteurs est le résultat final que l'on obtient lorsque l'on multiplie le premier par le second, le résultat obtenu par le troisième, le nouveau résultat par le quatrième, et ainsi de suite jusqu'à épuisement de tous les facteurs.*

Nous allons démontrer que ce produit est indépendant de l'ordre des facteurs ; nous nous appuierons, pour cela, sur un théorème, important en lui-même, que nous démontrerons d'abord.

Théorème. — *On ne change pas la valeur d'un produit de plusieurs facteurs en y remplaçant deux facteurs consécutifs quelconques par leur produit effectué.*

Considérons, en effet, le produit

$$2 \times 3 \times 5 \times 4.$$

Nous voulons démontrer qu'il est égal au produit

$$2 \times 15 \times 4,$$

que l'on obtient en remplaçant les facteurs consécutifs 3 et 5 par leur produit effectué 15 Pour effectuer le premier produit, en effet, nous devons multiplier 2 par 3 c'est-à-dire faire la somme de 3 nombres égaux à 2, puis multiplier ce produit par 5 c'est-à-dire ajouter encore 5 fois le même nombre; on obtient ainsi :

$$2+2+2+(2+2+2)+(2+2+2)+(2+2+2)+(2+2+2)$$

c'est-à-dire, en supprimant les parenthèses, la somme de 15 nombres égaux à 2; c'est-à-dire le produit 2×15. Si maintenant on multiplie par 4 les deux nombres égaux $2 \times 3 \times 5$ et 2×15 on obtient encore deux nombres égaux; c'est-à-dire que l'on a :

$$2 \times 3 \times 5 \times 4 = 2 \times 15 \times 4.$$

C. Q. F. D.

Remarque importante. — *Réciproquement, on peut remplacer, dans un produit de plusieurs facteurs, un facteur quelconque par un produit de deux facteurs qui lui est égal.*

Cette réciproque ne diffère pas du théorème que nous venons de démontrer, elle signifie que l'on a :

$$2 \times 3 \times 20 \times 6 = 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6.$$

Or, d'après le théorème direct, le second membre est égal au premier, donc le premier est égal au second.

Comme conséquence, *on peut intervertir dans un produit l'ordre de deux facteurs consécutifs quelconques.* Soit, en effet, le produit

$$4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8.$$

Pour montrer qu'on peut intervertir les facteurs 6 et 7 par exemple, il suffit d'écrire :

$$4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 = 4 \times 5 \times 42 \times 8 = 4 \times 5 \times 7 \times 6 \times 8.$$

On applique successivement le théorème précédent, sa réciproque, et le théorème relatif au produit de 2 facteurs : $6 \times 7 = 7 \times 6$.

Nous n'aurons maintenant aucune peine à démontrer le théorème général que nous avons annoncé.

Théorème. — *La valeur d'un produit de plusieurs facteurs est indépendante de l'ordre des facteurs.*

Prouvons par exemple que l'on a :

$$5 \times 2 \times 3 \times 4 \times 6 = 4 \times 3 \times 6 \times 2 \times 5.$$

Nous allons faire voir que, par des permutations entre des facteurs consécutifs, on peut amener les facteurs du second produit à l'ordre qu'ils occupent dans le premier. Pour cela, on amènera 5 à la première place, en le permutant successivement avec les facteurs qui seront à sa gauche. On aura, d'après le théorème précédent :

$$\begin{aligned} 4 \times 3 \times 6 \times 2 \times 5 &= 4 \times 3 \times 6 \times 5 \times 2 \\ &= 4 \times 3 \times 5 \times 6 \times 2 \\ &= 4 \times 5 \times 3 \times 6 \times 2 \\ &= 5 \times 4 \times 3 \times 6 \times 2. \end{aligned}$$

On amènera ensuite le facteur 2 à occuper la seconde place, *par des permutations qui ne toucheront pas à* 5; on aura :

$$\begin{aligned} 5 \times 4 \times 3 \times 6 \times 2 &= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 6 \\ &= 5 \times 4 \times 2 \times 3 \times 6 \\ &= 5 \times 2 \times 4 \times 3 \times 6. \end{aligned}$$

On amènera ensuite 3 à la 3e place, par une permutation qui ne change le rang, ni de 5, ni de 2; on obtient :

$$5 \times 2 \times 4 \times 3 \times 6 = 5 \times 2 \times 3 \times 4 \times 6,$$

ce que l'on voulait vérifier.

On voit que le succès de la méthode employée est dû à ce que l'on a soin de ne pas déranger les facteurs déjà mis en place pour mettre en place les autres; pour cela il est nécessaire de commencer par le premier (ou par le dernier) et de continuer régulièrement.

On peut énoncer brièvement les faits exprimés par les théorèmes précédents en disant que *la multiplication est commutative et associative.*

17. **Multiplication d'une somme ou d'une différence par un nombre.** — Voici 8 élèves; si je donne 2 billes à chacun d'eux, il m'en faut 2×8; si je donne ensuite 3 billes à chacun d'eux, il m'en faut 3×8. *Combien me faut-il de billes en tout?* Pour résoudre cette question, on peut procéder de deux manières; ou bien dire que l'on a donné une première fois 2×8 et une seconde fois 3×8, ce qui fait $2 \times 8 + 3 \times 8$, ou bien remarquer que l'on donne à chaque élève $2 + 3$ c'est-à-dire 5 billes en tout et que par suite, il en faut 5×8. Ces deux méthodes doivent donner le même résultat; on a, effectivement :

$$5 \times 8 = 2 \times 8 + 3 \times 8,$$

c'est-à-dire :

$$40 = 16 + 24.$$

On peut écrire aussi :

$$(2+3)\times 8 = 2\times 8 + 3\times 8,$$

la parenthèse employée dans le premier membre signifiant que l'on doit effectuer l'addition $2+3=5$ avant la multiplication par 8, tandis que, dans le second membre, on effectue d'abord les multiplications et ensuite les additions.

Cette égalité exprime le théorème suivant :

Théorème. — *Pour multiplier une somme par un nombre, il suffit de multiplier les diverses parties de la somme par ce nombre et d'ajouter entre eux les résultats obtenus.*

Pour donner un exemple dans lequel la somme ait plus de deux termes, supposons qu'un père donne à chacun de ses 5 enfants, 4 sous le dimanche, 3 sous le lundi, et 2 sous le mardi ; *combien donne-t-il de sous en tout dans ces trois jours ?* Il donne le dimanche 4×5, le lundi 3×5 et le mardi 2×5 c'est-à-dire en tout :

$$4\times 5 + 3\times 5 + 2\times 5,$$

ou bien :

$$20 + 15 + 10 = 45.$$

D'autre part, il donne à chaque enfant $4+3+2 = 9$ sous ; il donne donc en tout $9\times 5 = 45$; le résultat est forcément le même : 45 sous ; on peut exprimer ce fait en écrivant :

$$(4+3+2)\,5 = 4\times 5 + 3\times 5 + 2\times 5.$$

Suivant un usage commode, nous avons supprimé le signe $\times$ après la parenthèse ; cette omission ne

peut donner lieu à aucune erreur, si l'on est prévenu que, lorsque l'on supprime un signe d'opération, c'est toujours celui-là (voir page 112).

Traitons maintenant la question suivante : *6 enfants possèdent chacun 7 sous; ils dépensent chacun 3 sous; combien leur reste-t-il de sous en tout?* Nous pourrons encore raisonner de deux manières; ou bien dire : les enfants avaient en tout 7×6 ou 42 sous, ils dépensent 3×6 ou 18 sous, il leur reste donc $42 - 18$ ou 24 sous; ou bien dire : à chaque enfant il reste $7 - 3 = 4$ sous; il leur reste donc en tout $4 \times 6 = 24$ sous. Le résultat est forcément le même dans les deux cas, ce qui s'exprimera par l'égalité

$$(7 - 3)\,6 = 7 \times 6 - 3 \times 6.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Pour multiplier par un nombre donné la différence de deux autres, il suffit de multiplier successivement ces deux nombres par le nombre donné, et de retrancher le second résultat du premier.*

Plus généralement, si l'on a une expression de la forme :

$$6 - 3 + 4 - 5 + 2,$$

pour la multiplier par 5 il suffira de multiplier chaque terme par 5 et de conserver les signes; on aura :

$$(6 - 3 + 4 - 5 + 2)\,5 = 6 \times 5 - 3 \times 5 + 4 \times 5 - 5 \times 5 + 2 \times 5,$$

c'est-à-dire :

$$4 \times 5 = 30 - 15 + 20 - 25 + 10,$$

ce qu'il est aisé de vérifier. On traduit le fait exprimé par cette égalité en disant que la multiplicatiou est *distributive* par rapport à l'addition et par rapport à la soustraction.

II. JUSTIFICATION DE LA RÈGLE PRATIQUE

18. **Cas particuliers.** — Pour justifier la règle pratique de la multiplication, nous distinguerons plusieurs cas, en commençant par trois cas très élémentaires où le produit s'écrit immédiatement.

Premier cas. — *Les deux facteurs n'ont chacun qu'un seul chiffre.* Dans ce cas, on doit connaître le résultat; si on ne le connaissait pas, on l'obtiendrait en recourant à la définition de la multiplication comme addition abrégée. Il faut éviter de consulter la *table de Pythagore*, ou tableau où sont inscrits d'avance les produits des 9 premiers nombres les uns par les autres.

Second cas. — *L'un des facteurs est quelconque et l'autre est égal à l'unité, suivie d'un nombre quelconque de zéros.*

Soit par exemple, à multiplier 325 par 1 000, ou 1 000 par 325; nous savons que c'est la même chose. Nous devrons faire la somme de 325 nombres égaux à 1 000, c'est-à-dire de 325 collections de 1000 unités; nous les rangerons 10 par 10 et nous obtiendrons ainsi, d'après la signification même de 325, 32 collections de 10 000 unités, plus 5 collections de 1 000 unités qui resteront; nous rangerons de même 10 par 10 les 32 collections de 10 000 unités, et nous obtiendrons ainsi 3 collections de 100 000 unités, plus 2 collections de 10 000 unités qui resteront en dehors des groupes de 10. Finalement nous avons 3 collections de 100 000 unités, 2 collections de 10 000 unités et 5 collections de 1 000 unités, ce qui s'écrira 325 000. Ceci justifie la règle suivante :

Règle. — *Pour multiplier un nombre quelconque par l'unité suivie d'un certain nombre de zéros, il suffit d'écrire des zéros en nombre égal à la droite de ce nombre.*

Cas particulier. — Soit à multiplier 10 000 par 100; on obtient 1 000 000; le nombre des zéros du produit est égal à la *somme* des nombres de zéros des facteurs. On a donc la règle suivante :

Règle. — *Pour écrire le produit de plusieurs nombres dont chacun est égal à l'unité suivie d'un certain nombre de zéros, il suffit de faire suivre l'unité d'un nombre de zéros égal à la somme des nombres de zéros des divers facteurs.*

Troisième cas. — *Les deux facteurs ont chacun un seul chiffre significatif, suivi d'un certain nombre de zéros.*

Soit à multiplier 3 000 par 400. On remarquera que l'on a :

$$3\,000 = 3 \times 1\,000$$
$$400 = 4 \times 100.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} 3\,000 \times 400 &= 3 \times 1\,000 \times 4 \times 100 \\ &= 3 \times 4 \times 1\,000 \times 100 \\ &= 12 \times 100\,000 \\ &= 1\,200\,000. \end{aligned}$$

On a appliqué les théorèmes des pages 30 et 32. Le résultat conduit à la règle suivante :

Règle. — *Pour multiplier deux nombres dont chacun est formé d'un seul chiffre significatif suivi d'un certain nombre de zéros, il suffit d'écrire à droite du produit de ces deux chiffres un nombre de*

zéros égal à la somme des nombres de zéros des deux facteurs.

Bien entendu, s'il y a déjà un zéro dans le produit, on doit le laisser subsister et ajouter cependant le nombre de zéros indiqué par la règle. On a par exemple :

$$40 \times 50 = 2\,000.$$

19. **Cas généraux.** — Nous allons étudier maintenant les cas où le produit ne s'écrit pas simplement à vue d'œil, comme dans les cas précédents, mais où son obtention nécessite une opération. Nous distinguerons deux cas généraux suivant que l'un des facteurs (que nous pourrons supposer être le multiplicateur) n'a qu'un seul chiffre significatif, ou que les deux facteurs ont plusieurs chiffres significatifs.

Premier cas. — *Le multiplicateur n'a qu'un seul chiffre significatif.* Soit à multiplier 2 375 par 300 : nous remarquerons que l'on a :

$$2\,375 \times 300 = 2\,375 \times 3 \times 100;$$

il nous suffira donc de multiplier 2 375 par 3 et d'écrire deux zéros à la droite du produit obtenu.

Pour multiplier 2 375 par 3 nous remarquerons que l'on a :

$$\begin{aligned} 2\,375 \times 3 &= (2\,000 + 300 + 70 + 5)\,3 \\ &= 2\,000 \times 3 + 300 \times 3 + 70 \times 3 + 5 \times 3 \\ &= 6000 + 900 + 210 + 15. \end{aligned}$$

Nous sommes ramenés à faire une addition ; disposons-la comme il suit :

5×3	15
70×3	210
300×3	900
$2\,000 \times 3$	6 000
	7 125

Nous remarquerons que chacun des nombres que l'on additionne a au plus deux chiffres significatifs; de plus il y figure à droite un nombre de zéros qui augmente chaque fois d'une unité. Il est dès lors possible de faire l'addition sans inscrire les nombres, car on n'aura jamais qu'à en *retenir* un seul, ce à quoi la mémoire arrive sans peine. On dira donc : 5 fois 3, 15, je pose 5 et retiens 1 et l'on écrira 5 à droite; on dira ensuite : 7 fois 3, 21, et 1 de retenue, 22, je pose 2 et retiens 2; on a ainsi fait l'addition de la seconde colonne; ensuite : 3 fois 3, 9, et 2 de retenue, 11, je pose 1 et je retiens 1; 2 fois 3, 6 et 1 de retenue 7. On inscrit ainsi le produit 7 125.

On a donc :

$$2\,375 \times 300 = 712\,500.$$

D'où la règle pratique :

Règle. — *Pour multiplier un nombre quelconque par un nombre formé par un chiffre significatif suivi d'un certain nombre de zéros, on commence par écrire un nombre égal de zéros, qui seront les chiffres de droite du produit. Ensuite, on multiplie successivement tous les chiffres du multiplicande par le chiffre du multiplicateur, en commençant par la droite; on inscrit le chiffre des unités de chaque produit et on retient le chiffre des dizaines pour l'ajouter au produit suivant, sur lequel on procède de même,*

jusqu'à épuisement de tous les chiffres. Les chiffres obtenus s'inscrivent successivement à gauche des zéros primitivement inscrits.

Remarque. — Si le multiplicateur se terminait lui-même par un certain nombre de zéros, chacun d'eux fournirait un zéro à la droite du produit.

Second cas. — *Les deux nombres sont quelconques.* Soit à multiplier 2 345 par 875; on écrira :

$$875 = 800 + 70 + 5$$
$$2\,345 \times 875 = 2\,345\,(800 + 70 + 5)$$
$$= 2\,345 \times 800 + 2\,345 \times 70 + 2\,345 \times 5;$$

il suffira donc de multiplier successivement, d'après la règle précédente, 2 345 par 800, par 70 et par 5 et d'ajouter les *produits partiels* ainsi obtenus. On dispose d'habitude l'opération comme il suit :

$$\begin{array}{r} 2\,345 \\ 875 \\ \hline 11\,725 \\ 164\,15_0 \\ 1\,876\,_{000} \\ \hline 2\,051\,875 \end{array}$$

On écrit sous un premier trait le produit par 5, puis le produit par 70, puis le produit par 800; on omet d'habitude les zéros qui figureraient à droite de ces produits et que nous avons figuré par de plus petits caractères, c'est-à-dire qu'on écrit seulement les produits par 5, par 7, et par 8, mais on a soin de placer le dernier chiffre de chaque produit au dessous de l'avant-dernier du précédent, c'est-à-dire *d'avancer* d'un rang vers la gauche;

dans le cas où le multiplicateur renferme des zéros on doit avancer ainsi certains produits partiels de plusieurs rangs. Ainsi la multiplication de 2 345 par 807 005 devra avoir la disposition suivante :

```
      2 345
    807 005
   --------
     11 725
  16 415
 18 760
-----------
1 892 426 725
```

20. REMARQUE SUR LA MULTIPLICATION DES NOMBRES CONCRETS. — Dans les problèmes, les nombres qui interviennent sont généralement des nombres *concrets*, c'est-à-dire qui ont une signification concrète bien précise : 3 francs, 15 mètres, 8 heures. Il est évidemment nécessaire de connaître la signification concrète du produit; *cela est aussi utile que de connaître ce produit lui-même*. Nous distinguerons deux cas principaux, qui sont ceux que l'on rencontre le plus fréquemment, en nous restreignant au produit de deux facteurs.

PREMIER CAS. — L'un des facteurs, que l'on prendra comme multiplicateur, doit être considéré comme un nombre abstrait; le produit a alors la même signification concrète que le multiplicande; *il est exprimé avec la même unité*. Comme exemple de problèmes rentrant dans ce premier cas citons les suivants :

Un ouvrier gagne 2 francs l'heure, combien gagne-t-il en 3 heures?; la réponse est $2^{fr} \times 3$, c'est-à-dire 2 francs répétés 3 *fois*, c'est-à-dire 6 *francs*.

Un ouvrier gagne 2 sous l'heure, combien gagne-t-il en 3 heures? la réponse sera de même : 6 *sous*.

Un ouvrier fournit 3 heures de travail pour 1 franc, combien en fournira-t-il pour 2 francs? La réponse est ici 3 heures répétées 2 fois, c'est-à-dire 6 *heures*.

On voit que, dans ces divers problèmes, on ne doit pas dire que 3 *heures* multipliées par 2 *francs* donnent 6 *francs*

ou 6 *heures;* l'un des deux facteurs est dépouillé de sa signification concrète et désigne seulement le nombre de *fois* que doit être répété l'autre facteur.

Deuxième cas. — Traitons maintenant la question suivante : *une pièce rectangulaire a 4 mètres de long et 3 mètres de large, quelle est sa superficie?* On sait que c'est $4 \times 3 = 12$ *mètres carrés.* Ici le multiplicande et le multiplicateur ont *tous deux* une signification concrète, et le produit a une signification concrète *différente de celle de chacun d'eux.* Dans ce cas, la *signification concrète du produit dépend de la signification concrète des deux facteurs;* il est nécessaire de la connaître pour pouvoir interpréter correctement le résultat de l'opération que l'on a faite; il ne servirait de rien de savoir que la surface de la pièce est 12, si l'on ne savait pas s'il s'agit de 12 mètres carrés ou de 12 hectares.

21. Remarque sur la numération. — Les théorèmes sur la multiplication vont nous permettre de compléter ce que nous avons dit de la numération écrite et parlée [1].

Étant donné un nombre tel que 264 356 432, on peut d'après ce qui précède, écrire :

$$\begin{aligned} 264\,356\,432 = & (2 \times 100 + 6 \times 10 + 4)\ 1\,000\,000 \\ & + (3 \times 100 + 5 \times 10 + 6)\ 1\,000 \\ & + (4 \times 100 + 3 \times 10 + 2); \end{aligned}$$

cette décomposition correspond à la manière d'énoncer le nombre; on sous-entend seulement pour abréger le langage, les signes de multiplication et d'addition; de plus au lieu de six-dix on dit soixante, au lieu de cinq-dix, cinquante, etc., de sorte que l'on lit ainsi :

deux cent soixante-quatre millions trois cent cinquante-six mille quatre cent trente-deux.

On voit que dans la numération parlée, il y a une double décomposition du nombre; en *classes* comme l'on dit quelquefois : *unités, mille, millions,* etc., chaque classe comprenant 3 ordres, *unités, dizaines, centaines.* A ce point de vue

---

1. Nous suivons ici une marche inverse de celle de M. Jules Tannery, qui fait précéder la numération de l'étude des propriétés principales des opérations; la voie que nous adoptons nous a paru plus élémentaire; celle de M. Tannery est assurément plus logique.

la numération parlée n'est pas purement décimale, elle a à la fois pour bases 10 et 1 000.

Il est sans doute inutile de rappeler aux lecteurs de cette arithmétique que l'on dit *quatorze* au lieu de *dix-quatre; quatre-vingts* au lieu de *octante; quatre-vingt-treize*, au lieu de *nonante-trois*, etc. Ces modifications, consacrées par l'usage, leur sont familières dès l'enfance. Il est permis de regretter que les vieux mots : *septante*, *octante*, *nonante* ne subsistent plus que dans un petit nombre de régions; mais ce regret a été trop souvent exprimé par des auteurs de numérations pour qu'on puisse espérer qu'il ne reste pas platonique.

22. **Carrés et puissances.** — On appelle *carré* d'un nombre le produit de deux facteurs égaux à ce nombre; le *cube* d'un nombre est le produit de trois facteurs égaux à ce nombre; au lieu de *carré* et *cube* on dit aussi *deuxième* et *troisième puissances;* la *quatrième* puissance d'un nombre est le produit de *quatre* facteurs égaux à ce nombre, etc. Les secondes, troisième, quatrième, etc., puissances d'un nombre, tel que 17 se désignent par les notations 17^2, 17^3, 17^4. Les nombres 2, 3, 4... sont les exposants de 17. Il est utile d'observer qu'une puissance de 10 est un nombre formé de l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y a d'unités dans l'exposant; on a, par exemple :

$$10^7 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000\,000.$$

EXERCICES SUR LE CHAPITRE III

16. — Combien y a-t-il de secondes dans une année de 365 jours?

17. — Quel est le poids d'une somme de 5 millions de francs en monnaie française d'argent?

18. — Multiplier 998 par 10 003 (on remarque que $998 = 1000 - 2$).

19. — Multiplier 995 par 9 994.

20. — Multiplier 2 992 par 39 995.

21. — Calculer les produits de 142 857 par 2, par 3, par 4, par 5, par 6, par 7.

22. — Multiplier le nombre 111 111 par lui-même.

23. — Multiplier par 9 le nombre 123 456 789.

24. — Multiplier par 11 les nombres 181 818; 272 727; 545 454.

25. — Quelle est la surface d'un terrain rectangulaire dont une dimension est de 2^{km} et l'autre de 37^{m}.

26. — Quelle est la surface d'une route rectiligne de 500^{km} de long et de 6^{m} de large?

27. — Calculer le carré de 3 004; de 2 008; de 5 004; de 21 000 34.

28. — Calculer la sixième puissance de 1 001.

29. — Calculer la dixième puissance de 11.

30. — Sachant qu'une heure vaut 60 minutes et une minute 60 secondes on demande à combien de secondes équivalent $2^{h}30^{m}50^{s}$; $2^{h}35^{m}43^{s}$; $6^{h}34^{m}57^{s}$; $15^{h}18^{m}34^{s}$.

31. — On dit qu'un nombre est écrit dans le système de numération de base 8, si chaque chiffre placé à la gauche d'un autre exprime des unités 8 fois plus élevées; pour écrire un nombre dans le système de base 8, il suffit d'employer les 8 caractères : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; l'écriture 345 signifie alors $3 \times 8 \times 8 + 4 \times 8 + 5 = 192 + 32 + 5 = 229$; c'est-à-dire représente le même nombre que l'écriture 229 dans le système décimal. On demande d'écrire dans le système décimal les nombres suivants écrits dans d'autres systèmes; le système de numération est indiqué après chaque nombre :

2 347 (base 8)
3 458 (base 9)
161 360 (base 7)
301 462 (base 5)
100 34 (base 6)
3 010 321 (base 4)
20 121 202 (base 3)
101 010 121 (base 3)
101 011 010 111 (base 2).

32. — Lorsque l'on veut employer un système de numération dont la base est plus grande que 10, il faut créer des caractères nouveaux; par exemple dans le système de base 14 les nombres 10, 11, 12, 13 doivent être désignés par un seul caractère; nous conviendrons d'employer les lettres de

l'alphabet dans leur ordre habituel : *a*, *b*, *c*, *d*,.... pour désigner 10, 11, 12, 13.....

Ainsi l'écriture

$$ab \text{ (base 12)}$$

signifiera :

$$10 \times 12 + 11 = 131 \text{ (base 10)}.$$

L'écriture

$$dob \text{ (base 14)}$$

signifiera :

$$13 \times 14 \times 14 + 11 \text{ (base 10)}.$$

On demande d'écrire dans le système décimal les nombres suivants :

$$a13ob \text{ (base 12)}$$
$$134\,501 \text{ (base 11)}$$
$$abcd \text{ (base 20)}$$
$$3\,481 \text{ (base 15)}.$$

33. — Démontrer que le carré d'un nombre entier n'est jamais terminé par l'un des chiffres 2, 3, 7, 8.

CHAPITRE IV

DIVISION

I. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS

23. **Définition.** — *La division est une opération qui a pour but, étant donnés un premier nombre, appelé dividende, et un second nombre, appelé diviseur, d'en trouver un troisième, appelé quotient, tel que le produit du diviseur par le quotient soit égal au dividende.*

Par exemple, on dira que le quotient de 12 par 3 est égal à 4 et l'on écrira :

$$12 : 3 = 4$$

parce que l'on a :

$$3 \times 4 = 12.$$

On a de même :

$$156 : 13 = 12$$

car

$$12 \times 13 = 156.$$

Pour trouver le quotient de 156 par 13, on pour-

rait procéder comme il suit : écrivons les produits de 13 par les nombres entiers successifs :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169

Nous obtenons des nombres de plus en plus grands, que nous avons écrits sur la seconde ligne, chacun au-dessous du multiplicateur qui l'a fourni ; il se trouve que 156 est écrit au-dessous de 12 ; le quotient de 156 par 13 est donc 12.

24. **Cas où il y a un reste.** — Supposons que l'on demande de diviser 108 par 13 ; il résulte de notre tableau qu'il n'existe aucun nombre entier dont le produit par 13 soit égal à 108 ; en effet, les 8 premiers nombres entiers ont fourni des produits tous différents de 108 et les nombres supérieurs 9 donneront des produits supérieurs à 117 et par suite, *a fortiori* supérieurs à 108. La division, telle que nous l'avons définie, est impossible ; on exprime ce fait en disant que 108 n'est pas *divisible* par 13 ; au contraire 156 est *divisible* par 13 ; on dit aussi que 156 est un *multiple* de 13 et que 108 n'est pas un multiple de 13.

Définition. — *On dit qu'un nombre est multiple d'un autre, ou est divisible par cet autre, lorsqu'il est égal à cet autre, multiplié par un nombre entier.*

Nous venons de dire que 108 n'est pas divisible par 13 ; si nous considérons la suite des multiples de 13 :

13, 26, 39, 52, 65, 78, 91, 104, 117, 130,

nous voyons que 108 est compris entre les deux multiples consécutifs 104 et 117, dont les quotients

par 13 sont respectivement 8 et 9, on dira que 8 est le *quotient par défaut* et 9 le *quotient par excès* de 108 par 13; nous nous occuperons surtout des quotients par défaut; lorsque nous ne spécifierons pas, c'est du quotient par défaut qu'il s'agira.

DÉFINITION. — *Lorsque le dividende n'est pas divisible par le diviseur, on appelle quotient par défaut le plus grand nombre dont le produit par le diviseur soit inférieur au dividende.*

Cette définition est naturellement suggérée par l'étude des questions pratiques que permet de résoudre la division. Soit par exemple la question suivante : *Paul possède* 56^fr^; *combien peut-il acheter de lièvres, sachant qu'un lièvre coûte* 7^fr^? La réponse sera 8; car $7 \times 8 = 56$; 8 est le quotient de 56 par 7.

Soit maintenant la question analogue :

Paul possède 59^fr^; combien peut-il acheter de lièvres, chaque lièvre coûtant 7 francs; il ne peut en acheter que 8, car $7 \times 8 = 56$, somme inférieure à celle qu'il possède, tandis que $7 \times 9 = 63$, somme supérieure à son avoir. La réponse à la question est donc fournie par le *quotient par défaut*[1]. Après son achat, il *reste* à Pierre la différence entre 59^fr^ et 56^fr^, c'est-à-dire 3^fr^; le nombre 3 s'appelle le reste de la division de 59 par 7. Précisons cette définition :

DÉFINITION. — *Lorsque le dividende n'est pas divi-*

1. Comme type de question où la réponse serait fournie par le *quotient par excès* on peut citer la suivante : *Pierre possède 653 volumes; il veut les ranger dans des bibliothèques toutes semblables, dont chacune contient 100 volumes; combien devra-t-il acheter de bibliothèques?* Il est clair qu'il devra en acheter 7, car 6 ne lui suffiraient pas; mais la 7e ne sera pas pleine.

sible par le diviseur, on appelle reste la différence entre le dividende et le produit du diviseur par le quotient par défaut. Par extension, lorsque le dividende est divisible par le diviseur, on dit que le reste est égal à zéro.

25. **Formule fondamentale de la division.** — Reprenons les nombres 59 et 7; leur quotient par défaut est 8, et le reste est 3, car l'on a :

$$59 - 7 \times 8 = 3.$$

On peut écrire aussi :

$$59 = 7 \times 8 + 3.$$

Cette formule est la *formule fondamentale de la division;* elle exprime que *le dividende est égal au produit du diviseur par le quotient, plus le reste.*

Il est très important de remarquer que *le reste est toujours inférieur au diviseur*. En effet, si l'on forme les multiples successifs du diviseur 7 :

7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63,

le dividende 59 est compris entre deux de ces multiples, ici 56 et 63; la différence entre 59 et 56 est donc sûrement inférieure à la différence entre 63 et 56, laquelle est égal au diviseur 7, puisque $63 = 7 \times 9$ et $56 = 7 \times 8$.

Réciproquement, si l'on a :

$$38 = 8 \times 4 + 6,$$

on peut affirmer que 4 est le quotient de la division de 38 par 8 et que 6 est le reste, *parce que 6 est inférieur à 8*. Si l'on écrivait :

$$38 = 4 \times 8 + 6,$$

on ne pourrait pas en conclure que 8 est le quotient de 38 par 4, *parce que 6 est supérieur à 4;* effectivement, on a :

$$38 = 4 \times 9 + 2;$$

le quotient de 38 par 4 est 9, et le reste est 2.

Si l'on désigne par a le dividende, par b le diviseur, par q le quotient, et par r le reste, la formule fondamentale de la division s'écrit :

$$a = b \times q + r,$$

ou, en sous-entendant le signe $\times$ entre les lettres b et q :

$$a = bq + r.$$

Mais cette égalité ne suffit pas pour que l'on puisse affirmer que q est le quotient de a par b et r le reste, il faut encore que r soit inférieur à b, ce que l'on écrit :

$$r < b.$$

On peut donc dire que *le quotient et le reste de la division de a par b sont définis par les deux formules simultanées :*

$$\begin{cases} a = bq + r \\ r < b \end{cases}$$

26. **Théorèmes sur la division.** — Nous allons démontrer deux importantes propositions, qui nous seront utiles plus loin. La première s'énoncerait correctement comme il suit : *étant donnés le dividende, le diviseur, le quotient et le reste d'une division, si l'on considère une seconde division dans laquelle le dividende est égal au dividende de la pre-*

mière multiplié par un certain nombre, et le diviseur égal au diviseur de la première multiplié par le même nombre, le quotient de cette seconde division est égal au quotient de la première et le reste de cette seconde division est égal au produit du reste de la première, par le même nombre. Au lieu de ce long énoncé, on adopte l'énoncé plus abrégé suivant, auquel on donne la même signification.

THÉORÈME I. — *Si l'on multiplie le dividende et le diviseur d'une division par un même nombre le quotient ne change pas et le reste est multiplié par ce nombre.*

Démontrons d'abord le théorème sur un exemple concret; soient les deux questions suivantes :

*Paul possède 29*fr*; combien peut-il acheter de livres, si chaque livre coûte 4*fr*, et quelle somme lui restera-t-il?*

*Pierre possède 29 pièces de 20*fr*; combien peut-il acheter de fauteuils, si chaque fauteuil coûte 4 pièces de 20*fr*, et combien lui restera-t-il?*

Il est clair que Paul peut acheter 6 livres et Pierre 6 fauteuils ; il reste ensuite au premier 3fr et au second 3 pièces de 20fr c'est-à-dire 60fr. Le *quotient* 6 est le même; le *reste* devient 20 fois plus grand; le dividende et le diviseur étaient 20 fois plus grands. Les formules de la division s'écriraient, pour Paul :

$$(1) \qquad \begin{cases} 29 = 4 \times 6 + 3 \\ 3 < 4 \end{cases}$$

et pour Pierre :

$$(2) \qquad \begin{cases} 29 \times 20 = 4 \times 20 \times 6 + 3 \times 20 \\ 3 \times 20 < 4 \times 20 \end{cases}$$

ou bien :

$$(3) \qquad \begin{cases} 580 = 80 \times 6 + 60 \\ 60 < 80 \end{cases}$$

Pour démontrer le théorème en se servant exclusivement des formules, il suffit de faire voir que les formules (2) ou (3) sont une conséquence des formules (1); en effet, pour multiplier par 20 une somme, il suffit de multiplier par 20 les deux parties de la somme; si l'on applique ce principe à la première des formules (1), on obtient :

$$29 \times 20 = 4 \times 6 \times 20 + 3 \times 20,$$

et il suffit d'intervertir l'ordre des facteurs 6 et 20 dans le premier terme du second membre pour avoir la première des formules (2). Quant à la seconde, elle résulte du fait que si l'on multiplie les deux nombres inégaux 3 et 4 par le même nombre 20, les résultats sont inégaux dans le même ordre que les multiplicandes, c'est-à-dire que le plus petit multiplicande donne le plus petit produit.

On peut donner à cette démonstration *une forme* plus générale en employant des lettres pour désigner les nombres; on écrira les formules fondamentales de la division :

$$\begin{cases} a = bq + r \\ r < b \end{cases}$$

et il s'agira de démontrer que l'on peut en conclure les formules :

$$\begin{cases} am = bm.q + rm \\ rm < bm \end{cases}$$

qui expriment que q est le quotient et rm le reste

de la division de am par rm. Les raisonnements sont exactement les mêmes que ceux que nous venons d'employer; il est inutile de les répéter.

Nous allons maintenant passer au cas où l'on divise le dividende et le diviseur par un même nombre, au lieu de les multiplier; le théorème que nous allons démontrer s'énonce comme il suit : *étant donnés le dividende, le diviseur, le quotient et le reste d'une division, si l'on considère une seconde division dans laquelle le dividende est égal au dividende de la première division, divisé par un certain nombre m, et le diviseur au diviseur de la première divisé par le même nombre m, on peut affirmer que le quotient de la seconde division est égal au quotient de la première et que le reste de la seconde division est égal au quotient du reste de la première par le même nombre m*. On suppose, dans cet énoncé, que le dividende et le diviseur de la première division sont *divisibles* par le nombre m, l'énoncé exprime que le reste de la seconde division est égal au quotient exact par m du reste de la première, c'est-à-dire que ce premier reste est aussi divisible par m; cet énoncé comprend ainsi un théorème que nous retrouverons au chapitre suivant, dans la théorie de la divisibilité.

Quant à la démonstration du théorème que nous venons d'énoncer, elle est inutile si l'on remarque que, avec l'énoncé complet que nous avons donné, ce théorème est *absolument identique* au théorème précédent, énoncé sous sa forme complète, comme nous l'avons donné page 50; la seule différence, c'est que nous appelons maintenant *première division* la division que nous appelions *seconde division*,

et inversement ; on pourrait réunir les deux énoncés en un seul, qui serait le suivant : *si l'on considère deux divisions, telles que le dividende et le diviseur de l'une d'elles soient égaux au produit par m du dividende et du diviseur de l'autre (et par suite le dividende et le diviseur de celle-là égaux aux quotients par m du dividende et du diviseur de celle-ci), les quotients sont égaux, et le reste de l'une est égal au produit par m du reste de l'autre (et par suite ce dernier reste est égal au quotient par m de l'autre reste).*

Il est souvent commode de se servir d'un énoncé abrégé, analogue à celui que nous avons donné déjà pour le cas où l'on multiplie ; sous cette forme abrégée, les deux énoncés paraissent distincts, et il peut être effectivement utile, en vue des applications, de connaître ces deux formes différentes du théorème précédent. Nous énoncerons donc le théorème suivant :

Théorème II. — *Lorsqu'on divise par un même nombre le dividende et le diviseur d'une division, supposés divisibles par ce nombre, le quotient ne change pas et le reste est divisé par ce nombre.*

Comme application, proposons-nous de diviser 35 000 par 8 000 ; si l'on divise 35 par 8 le quotient est 4 et le reste 3 ; le quotient de 35 000 par 8 000 sera donc 4 et le reste 3 000.

II. RÈGLE PRATIQUE DE LA DIVISION

Nous diviserons en *trois* parties l'exposition de la règle pratique de la division :

1° Détermination du nombre des chiffres du quotient.

2° Cas où le quotient a un seul chiffre.

3° Cas où le quotient a plusieurs chiffres.

27. **Détermination du nombre des chiffres du quotient.** — Soient les nombres 23 457 et 474; combien leur quotient a-t-il de chiffres? Formons les produits de 474 par 1, 10, 100, 1 000, etc.

$$474 \times 1 = 474$$
$$474 \times 10 = 4\,740$$
$$474 \times 100 = 47\,400$$
$$474 \times 1\,000 = 474\,000$$

Le dividende donné 23 457 est compris entre 4 740 et 47 400; *il en résulte que le quotient de 23 458 par 474 est au moins égal à 10 et est inférieur à 100;* il a donc 2 chiffres. Pour justifier l'affirmation précédente, il suffit de remarquer que si l'on fait les produits de 474 par 11, 12, 13, ..., 98, 99, on obtiendra des nombres compris entre 4 740 et 47 400 :

10,	11,	12, ...,	98,	99,	100,
4 740,	5 214,	5 688, ...,	46 452,	46 926,	47 400.

Le nombre 23 457, étant compris entre 4 740 et 47 400, se trouve compris entre *deux nombres consécutifs* de la seconde ligne (ou est égal à *l'un d'eux*); le nombre de la première ligne écrit au-dessus du plus petit de ces deux nombres (ou du nombre égal à 23 457) est le quotient cherché; il a 2 chiffres.

On déduit de là la règle suivante :

Règle. — *Pour obtenir le nombre des chiffres du quotient on écrit successivement à la droite du divi-*

seur un zéro, puis un second zéro, puis un troisième, etc., jusqu'à ce que l'on obtienne un nombre supérieur au dividende; le nombre de zéros que l'on a ajoutés est égal au nombre de chiffres cherché.

28. **Cas où le quotient a un seul chiffre.** — Soit à diviser 26637 par 8432; d'après la règle précédente, le quotient a un seul chiffre, car 84320 est supérieur à 26637. Pour obtenir ce chiffre, on pourrait multiplier successivement 8432 par 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; le plus grand parmi ces nombres qui fournirait un produit inférieur (ou égal) au dividende serait le quotient cherché. Cette méthode serait sûre, mais longue. En pratique, on préfère employer une marche qui permette de diminuer le nombre des essais, c'est-à-dire des multiplications. Pour cela, on considère le premier chiffre à gauche du diviseur, ici 8, et on se demande combien de fois il est contenu dans 26, nombre formé ici par les deux chiffres à gauche du dividende; si le premier chiffre à gauche du dividende était supérieur ou égal à 8, on prendrait ce chiffre seul au lieu d'en prendre 2; ici 26 contient 8 3 fois, on essaiera donc le chiffre 3, c'est-à-dire que l'on multipliera le diviseur par 3, et que l'on retranchera le produit du dividende; on disposera ainsi l'opération :

$$\begin{array}{r|l} 26\,637 & 8\,432 \\ \cline{2-2} 25\,296 & 3 \\ \cline{1-1} 1\,341 & \end{array}$$

Le produit de 8432 par 3 est 25296, la différence entre 26637 et 25296 est 1341; c'est le *reste*

de la division ; ce reste est bien, comme il doit être, inférieur au diviseur.

Pratiquement, on n'écrit pas le plus souvent le produit 25296 de 8432 par 3 ; on fait d'un seul coup la multiplication et la soustraction ; l'on dit : 3 fois 2, 6, ôtés de 7 reste 1 ; et l'on écrit 1 ; 3 fois 3, 9, ôtés de 13 reste 4, et je retiens 1 ; et l'on écrit 4 ; 3 fois 4, 12 et 1 13, ôtés de 16 reste 3, et je retiens 1 ; et l'on écrit 3 ; 3 fois 8, 24 et 1, 25, ôtés de 26, reste 1, et l'on écrit 1. Au sujet de cette marche abrégée, il y a seulement lieu de remarquer que l'on y confond et y ajoute les *retenues* provenant de la *multiplication* et, celles qui proviennent de la *soustraction*. Il serait facile de justifier cette manière de procéder, et aussi le fait que le chiffre 3, déterminé par la règle indiquée, ne peut pas être *trop faible*, c'est-à-dire donner un reste plus grand que le diviseur ; mais nous admettrons ces points, n'ayant pas à faire de théorie de la division. Il peut se faire que le chiffre essayé, d'après la règle précédente, soit *trop fort*, on s'en aperçoit à ce que, multiplié par le diviseur, il donne un produit supérieur au dividende ; dans ce cas on essaye le chiffre inférieur, et ainsi de suite, jusqu'à ce que le chiffre essayé soit *bon*, ce que l'on reconnaît à ce que son produit par le diviseur est inférieur au dividende, la différence ou reste étant inférieure au diviseur.

Pratiquement, surtout dans le cas où le premier chiffre à gauche du diviseur est faible (1, 2 ou 3) et que le second chiffre est plus élevé, la règle précédente conduit souvent à essayer un chiffre trop fort. L'habitude du calcul permet de diminuer ces essais par divers procédés. Soit par exemple à diviser

345 367 par 184 534 ; la règle conduirait à essayer 3, puis 2, puis 1 ; il suffit de comparer les nombres formés par les deux chiffres à gauche des deux nombres et de remarquer que 2 fois 18 font 36 pour reconnaître que les opérations qui consisteraient à multiplier par 3 et par 2 le nombre 184 534, opérations relativement longues, sont complètement inutiles, et que le chiffre 1 est bon.

Soit à diviser 34 625 par 4 975 ; on serait conduit à essayer d'abord 8, puis 7, puis 6 ; on remarquera que le diviseur donné est très voisin de 5 000 et que 7 fois 5 000 donnent 35 000, nombre supérieur à 34 625 ; on est conduit ainsi à essayer 6, ce qui se trouve justifié par le fait que l'on obtient un reste inférieur au diviseur. Nous énoncerons donc la règle suivante.

Règle. — *Pour effectuer une division dans laquelle le quotient n'a qu'un chiffre, on multiplie par le diviseur divers nombres d'un chiffre et on retranche le produit obtenu du dividende jusqu'à ce que le multiplicateur employé soit reconnu bon, ce que l'on reconnaît à ce que son produit par le diviseur est inférieur ou égal au dividende, la différence ou reste étant inférieure au diviseur. Dans le choix des multiplicateurs que l'on essaye, on se laisse guider par la grandeur relative des nombres formés par les chiffres à gauche du dividende et du diviseur. Si l'on veut être assuré de ne jamais essayer de chiffre trop faible, on peut commencer par essayer le quotient par le dernier chiffre à gauche du diviseur du nombre d'un ou deux chiffres qui exprime des unités du même ordre dans le dividende, et diminuer successivement, d'une, deux, trois, etc., unités, le chiffre essayé jusqu'à ce que l'on trouve un produit inférieur au dividende.*

29. **Cas où le quotient a plusieurs chiffres.** — Dans ce cas, nous énoncerons la règle suivante.

Règle. — *Pour déterminer le quotient d'une division lorsque ce quotient a plusieurs chiffres, on forme un premier dividende partiel en séparant à la gauche du dividende un nombre de chiffres tel que le nombre qu'ils forment divisé par le diviseur, fournisse un quotient d'un seul chiffre. On détermine, d'après la règle du cas précédent, le quotient et le reste de la division de ce premier dividende partiel par le diviseur; on écrit le chiffre obtenu comme quotient, qui sera le premier chiffre à gauche du quotient cherché, à la place réservée pour le quotient et l'on écrit le reste au-dessous du premier dividende partiel; on forme ensuite le second dividende partiel, en écrivant à la droite du premier reste, le chiffre du dividende situé immédiatement à droite des chiffres qui constituent le premier dividende partiel (c'est ce que l'on appelle abaisser le chiffre suivant); on divise ce second dividende partiel par le diviseur; le quotient est le second chiffre du quotient cherché et le reste est le second reste; dans le cas où le second dividende partiel est inférieur au diviseur, on inscrit 0 comme second chiffre du quotient et le second reste est précisément ce second dividende partiel; on procède sur le second reste comme sur le premier, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on ait épuisé tous les chiffres du dividende; le dernier reste est le reste de la division.*

30. Cas particuliers. — Nous ne pouvons indiquer ici toutes les abréviations que l'expérience du calcul peut suggérer; chacun sera mieux conseillé en cette matière par son expérience personnelle que par l'expérience d'autrui; pour pou-

voir se servir avec fruit d'une méthode abrégée de calcul, il faut presque l'avoir imaginée soi-même. De plus, les méthodes abrégées de calcul vraiment pratiques sont le plus souvent très longues à exposer didactiquement; et elles sont souvent d'autant plus simples que cette exposition est plus longue.

Indiquons cependant, à titre d'exemple, un procédé assez rapide pour diviser un nombre par 2 ou, comme on dit aussi, en prendre la moitié. On connaît les moitiés des nombres 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18; on associe ainsi au chiffre 6, par exemple les moitiés 3 et 8, suivant que l'on prend la moitié de 6 ou de 16; de même à 2 sont associés 1 et 6, à 4 sont associés 2 et 7, à 8 sont associés 4 et 9; enfin à 0 sont associés 0 et 5 moitiés de 0 et de 10. Cela remarqué, on écrira aisément du premier coup d'œil la moitié d'un nombre de deux chiffres, dont le second chiffre est pair; si le premier chiffre est pair, si par exemple on a 84, on écrira les moitiés des deux chiffres, ce qui donne 42; si le premier chiffre est impair, par exemple 54 ou 74, on écrira 27 et 37, 2 ou 3 étant les quotients par 2 par défaut de 5 et 7, et 7 étant la moitié de 14 ou, si l'on préfère, le chiffre que l'on associe à 4 lorsque 4 est précédé d'un chiffre impair. Les mêmes remarques permettront d'écrire aussi, presque à vue d'œil, la moitié d'un nombre de 3 chiffres dont le dernier chiffre est pair; si ce nombre est 356, on saura que la moitié de 34 est 17 et on écrira à droite de 17 le chiffre 8, moitié de 16, ou associé de 6 lorsque 6 est précédé d'un chiffre impair; la moitié de 356 est donc 178.

Pour écrire la moitié d'un nombre quelconque, il suffira de le décomposer par la pensée en parties se terminant autant que possible par un chiffre pair et choisies de manière que la moitié de chaque partie s'écrive aisément. Par exemple, soit le nombre :

25 678 314;

on le décomposera par la pensée comme il suit, et l'on écrira la moitié sous chaque partie :

2	56	78	314
1	28	39	157

La moitié cherchée est 12 839 157. Si l'on a le nombre :

395 735 178

dont tous les chiffres, sauf le dernier, sont impairs on le décomposera simplement par la pensée en tranches de 2 chiffres, on écrira ensuite la moitié de 38, puis la moitié de 156, puis la moitié de 134, etc.; mais le calcul est alors forcément un peu plus long. On peut néanmoins, dans tous les cas, arriver avec un peu d'habitude à écrire presque à vue la moitié d'un nombre.

Nous verrons, après la théorie de la divisibilité, d'autres moyens d'abréger certaines divisions (pages 67, 70 et 101).

EXERCICES SUR LE CHAPITRE IV

34. — Diviser par 11 les nombres suivants : 101, 1 001, 10 001, 100 001. Généraliser.

35. — Diviser par 37 les nombres 1 000, 1 000 000, 1 000 000 000, etc.

36. — Convertir 33 457 secondes en heures, minutes et secondes.

37. — Un écolier met $5^{m}12^{s}$ pour écrire une page ; combien de temps mettra-t-il pour écrire 100 pages ?

38. — Le nombre 3 645 étant écrit dans le système décimal, on demande de l'écrire dans le système de base 8.

39. — Le nombre 10 000 étant écrit dans le système de base 9, comment s'écrit le même nombre dans le système de base 12.

40. — Écrire le nombre 3 457 dans le système de base 3; dans le système de base 2.

41. — Un patron doit payer 63 employés et leur donner 31 francs à chacun; il n'a en caisse que des pièces de 20^{fr}; combien doit-il en emporter ?

42. — Combien de jours faudrait-il pour faire le tour de la terre ($40\,000^{km}$) à un oiseau qui parcourrait 3 mètres par seconde et qui suivrait exactement un grand cercle.

43. — Quels sont les nombres qui, divisés par 37, donnent un quotient égal au reste ?

44. — Le dividende d'une division est 3 457 et le quotient 15; quels sont le diviseur et le reste ? Y a-t-il plusieurs solutions ?

45. — On ne change pas le quotient par défaut d'une division en augmentant le dividende d'un nombre moindre que la différence entre le diviseur et le reste.

46. — Lorsque la somme du quotient et du reste est inférieure au diviseur diminué d'une unité, on ne change pas le quotient en diminuant le diviseur d'une unité.

CHAPITRE V

DIVISIBILITÉ. — PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR ET PLUS PETIT COMMUN MULTIPLE

I. THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LA DIVISIBILITÉ

31. **Divisibilité d'une somme et d'une différence.** — Rappelons la définition que nous avons donnée dans le chapitre précédent :

Définition. — *Un nombre, tel que 12, est dit un diviseur d'un autre, lorsque la division de ce nombre par 12 s'effectue exactement, sans reste.* Ainsi 12 est un diviseur de 36 et n'est pas un diviseur de 45.

Au lieu de dire que 12 est un diviseur de 36, on peut dire aussi que 12 divise 36, ou que 36 est un multiple de 12. Le fait que 36 ou que 156 sont des multiples de 12 s'exprime par les relations

$$36 = 12 \times 3 \qquad 156 = 12 \times 13.$$

Théorème I. — *Lorsqu'un même nombre en divise plusieurs autres, il divise leur somme.*

Considérons, par exemple, le nombre 6 qui divise 18, 24 et 30; on a :

$$18 = 6 \times 3, \quad 24 = 6 \times 4, \quad 30 = 6 \times 5,$$

je dis que 6 divise $18 + 24 + 30$, c'est-à-dire 72. En effet, on a :

$$72 = 6 \times 3 + 6 \times 4 + 6 \times 5 = 6(3 + 4 + 5) = 6 \times 12.$$

On a appliqué le théorème précédemment démontré : *Le produit d'une somme par un nombre est égal à la somme des produits par ce nombre des diverses parties de la somme.*

On peut donner du théorème I une démonstration plus concrète et plus simple : Paul, Jacques et Jean possèdent le premier 3 pièces de 20^{fr}, le second 4 pièces de 20^{fr}; le troisième 5 pièces de 20^{fr}; la somme possédée par chacun d'eux est donc divisible par 20; Paul a 60^{fr}, Jacques 80^{fr}, Jean 100^{fr}. S'ils réunissent leurs fortunes, la somme totale obtenue, 240^{fr}, sera encore divisible par 20; c'est un nombre exact de fois 20^{fr}, car cette somme est représentée par un certain nombre de pièces de 20^{fr}. Sous cette forme, le théorème est évident.

Corollaire. — *Pour diviser une somme par un nombre il suffit de diviser par ce nombre les diverses parties de la somme supposées divisibles, et d'ajouter les résultats obtenus.*

Ce corollaire résulte de la démonstration même du théorème précédent; si nous l'avons énoncé, c'est pour avoir l'occasion de faire observer qu'il ne serait pas exact, si l'on n'avait pas soin de dire que les diverses parties de la somme sont divisibles par

le diviseur considéré. Pour rendre cette remarque claire, donnons deux exemples.

EXEMPLE I. — *Paul possède 12 sous et Pierre 15 sous; combien peuvent-ils, en réunissant leurs avoirs, acheter d'oranges à 3 sous?* On pourra dire, *ou bien :* Paul peut acheter $12:3=4$ oranges et Pierre $15:3=5$ oranges; à eux deux, ils en achèteront $4+5=9$; *ou bien :* Paul et Pierre ont à eux deux 27 sous; ils achèteront $27:3=9$ oranges. Le corollaire est bien vérifié; ces deux méthodes donnent le même résultat, comme on devait s'y attendre.

EXEMPLE II. — *Paul possède 8 sous et Pierre 13 sous; combien peuvent-ils, en réunissant leurs avoirs, acheter d'oranges à 3 sous?*

Ici Paul, avec ses 8 sous, ne peut avoir que 2 oranges, et il lui reste 2 sous; Pierre, avec ses 13 sous, n'en peut avoir que 4, et il lui reste 1 sou; si donc ils vont faire leurs achats séparément, ils n'auront que $2+4=6$ oranges. Si, au contraire, ils réunissent d'abord leurs avoirs, leur caisse commune renfermera $8+13=21$ sous, et ils pourront acheter 7 oranges; on comprend bien pourquoi on ferait une faute grave en appliquant ici le corollaire, car les parties 8 et 13 de la somme 21 ne sont pas divisibles par 3.

On voit, en même temps, par un exemple, qu'une somme de deux nombres peut fort bien être divisible par 3, bien qu'aucun d'eux ne le soit.

THÉORÈME II. — *Lorsqu'un même nombre en divise deux autres, il divise leur différence.*

Soit en effet le nombre 4 qui divise 20 et 12, on a :

$$20=4\times 5 \qquad 12=4\times 3.$$

Il en résulte :

$$8 = 20 - 12 = 4 \times 5 - 4 \times 3 = 4(5-3) = 4 \times 2.$$

En rapprochant les membres extrêmes, on voit qu'il résulte des hypothèses que 4 divise la différence 8 de 20 et de 12. Au sujet du quotient, on peut énoncer un corollaire analogue à celui du théorème I.

Corollaire. — *Pour diviser par un nombre donné la différence de deux autres, il suffit de diviser ces deux nombres, supposés divisibles, par le nombre donné, et de prendre la différence des quotients.*

Ce corollaire appelle les mêmes observations que celui du théorème I dans les cas de non-divisibilité.

Exemple I. — On a : $600 : 6 = 100$; $24 : 6 = 4$; $600 - 24 = 576$; $100 - 4 = 96$; il en résulte $576 : 6 = 96$, comme il est aisé de le vérifier directement.

Exemple II. — Le quotient de 31 par 6 est 5 et le reste 1; le quotient de 17 par 6 est 2 et le reste est 5; le quotient de $31 - 17$, c'est-à-dire de 14 par 6 est égal à 2; il n'est pas égal à la différence $5 - 2$ des quotients de 31 et de 17.

On donne quelquefois à l'énoncé du théorème II une autre forme, plus commode pour certaines applications; on remarque, pour cela, que si un nombre tel que 28 est la somme de deux autres 16 et 12, on peut dire que l'un de ces nombres est égal à la différence entre 28 et l'autre; *c'est la définition même de la soustraction.* Ainsi, lorsqu'on a une somme de deux parties, l'une des deux parties de la somme est égale à la différence entre la somme et l'autre partie. D'où l'énoncé, complète-

ment équivalent au théorème II, et que nous appellerons théorème II *bis*.

THÉORÈME II *bis*. — *Lorsqu'un nombre divise une somme de deux parties et l'une des parties de la somme, il divise l'autre.*

32 **Divisibilité et division d'un produit par un nombre.** — THÉORÈME III. — *Pour qu'un produit de plusieurs facteurs soit divisible par un nombre, il suffit que l'un des facteurs du produit soit divisible par ce nombre.*

Soit, par exemple, le produit 12×15, dont un facteur 15 est divisible par 5 ; ce produit est divisible par 5, car on a $15 = 5 \times 3$ et par suite (n° 16) on a :

$$12 \times 15 = 12 \times 5 \times 3 = 60 \times 3.$$

Donc 12×15 est un multiple de 3, ou est divisible par 3.

On peut énoncer le théorème III sous une forme équivalente en disant : *les multiples d'un multiple d'un nombre sont multiples de ce nombre.*

Donnons un exemple concret : *Pierre possède 6 pièces de 20^{fr}; son avoir est-il divisible par 5, c'est-à-dire possède-t-il un nombre exact de fois 5^{fr}?* Il est clair que oui, car 20 étant divisible par 5, chaque pièce de 20^{fr} équivaut à un nombre exact de fois 5^{fr}; en fait, à 4 fois 5^{fr}. Pierre possède 6 pièces de 20 francs, il a 6 fois 4 fois 5^{fr}, c'est-à-dire 24 fois 5^{fr}. Pour diviser par 5 le produit 6×20, il suffit donc de former un nouveau produit dans lequel le facteur 20 est remplacé par son quotient par 5; il n'est pas inutile d'énoncer cette règle.

RÈGLE. — *Pour diviser par un nombre un pro-*

duit de plusieurs facteurs, dans le cas où l'un des facteurs est divisible par ce nombre, il suffit d'écrire un nouveau produit, identique au premier, sauf que le facteur divisible y est remplacé par son quotient.

Ainsi le quotient par 5 du produit $7 \times 15 \times 4$ est $7 \times 3 \times 4$.

Dans le cas où deux facteurs du produit sont divisibles par le nombre donné, on peut diviser celui qu'on veut, mais il faut se garder de les diviser tous deux. Par exemple le quotient par 4 du produit 12×20 est égal à 3×20 ou à 12×5. Si Paul possède 12 pièces de 20^{fr} et désire distribuer son avoir en 4 parties égales, il peut composer chaque partie de 3 pièces de 20^{fr}, ou bien échanger chaque pièce de 20^{fr} contre 4 pièces de 5^{fr} et composer chaque partie de 12 pièces de 5^{fr}.

Remarque. — Il est essentiel d'observer qu'un produit de facteurs peut être divisible par un nombre, *bien qu'aucun facteur du produit ne soit divisible par ce nombre;* cette condition est *suffisante*, mais non *nécessaire*. Ainsi le produit $3 \times 4 = 12$ est divisible par 6 bien que ni 3 ni 4 ne soient divisibles par 6. L'avoir de Paul est sûrement un nombre exact de fois 20^{fr} si Paul possède 6 pièces de 20^{fr}, ou bien s'il possède 20 pièces de 2^{fr}, ou 20 pièces de 5^{fr}, mais aussi s'il possède 8 pièces de 5 , par exemple, car il a alors 40^{fr}.

33. **Division d'un nombre par un produit de facteurs**. — Théorème IV. — *Pour diviser un nombre par un produit de plusieurs facteurs, on peut procéder comme il suit : le diviser par le premier facteur, diviser le quotient par le second facteur, diviser le second quotient par le troisième facteur, et ainsi*

de suite, jusqu'à épuisement de tous les facteurs; le quotient final est le quotient cherché.

Nous n'examinerons que le cas où toutes les divisions se font exactement, sans reste; le théorème est cependant vrai dans tous les cas.

Soit à diviser 630 par $42 = 2 \times 3 \times 7$; si nous appliquons la règle précédente, nous trouverons successivement :

$$630 : 2 = 315$$
$$315 : 3 = 105$$
$$105 : 7 = 15.$$

Le quotient cherché est donc 15, comme on peut le vérifier; pour le démontrer, on remarquera que les égalités précédentes équivalent aux suivantes :

$$105 = 7 \times 15$$
$$315 = 3 \times 105 = 3 \times 7 \times 15$$
$$630 = 2 \times 315 = 2 \times 3 \times 7 \times 15 = 42 \times 15.$$

On s'est servi des principes établis au n° 16.

Pour donner un exemple concret, supposons que Paul possède 300^{fr} en billets de 100^{fr}, et veuille partager également cette somme entre 15 personnes; il pourra remarquer que $15 = 5 \times 3$, c'est-à-dire que les 15 personnes peuvent être groupées en 3 groupes de 5 personnes; à chaque groupe, il donnera $300 : 3 = 100^{fr}$, et les 5 personnes de chaque groupe devront se partager ces 100^{fr}, ce qui donnera pour chacune $100 : 5 = 20^{fr}$.

Remarque. — Lorsqu'on veut diviser par un produit de facteurs un nombre qui est lui-même sous la forme d'un produit de facteurs, on peut, en combinant les théorèmes III et IV, diviser par chaque

facteur du diviseur le facteur que l'on veut dans le dividende, à condition que les divisions soient toutes possibles; on devra avoir soin d'employer ainsi tous les facteurs du diviseur; et chacun une seule fois. Pour éclaircir cette remarque proposons-nous de diviser le produit $42 \times 10 \times 7$, par le produit 3×5 on aura :

$$42 : 3 = 14$$
$$10 : 5 = 2.$$

Le quotient cherché est donc $14 \times 2 \times 7$.

On peut diviser successivement un même facteur du dividende par plusieurs facteurs du diviseur; mais chaque facteur du diviseur ne doit être employé qu'une fois (à moins que le diviseur ne renferme plusieurs fois le même facteur).

Exemple I. — *Diviser* $36 \times 40 \times 3$ *par* $6 \times 5 \times 4$; on écrira :

$$36 : 6 = 6$$
$$40 : 5 = 8 \quad 8 : 4 = 2.$$

Le quotient cherché est $6 \times 2 \times 3$.

Exemple II. — *Diviser* $21 \times 30 \times 40$ *par* $5 \times 5 \times 7$. Le facteur 5 figure 2 fois dans le diviseur; on aura :

$$21 : 7 = 3$$
$$30 : 5 = 6$$
$$40 : 5 = 8.$$

Le quotient cherché est $3 \times 6 \times 8$.

Nous reviendrons sur cette question dans le chapitre suivant, après avoir parlé des *nombres premiers;* contentons-nous d'observer qu'il y a parfois *divisibilité*, bien que la méthode précédente de division

ne s'applique pas; ainsi le produit $12 \times 35 = 420$ est divisible par $14 \times 10 = 140$ comme on s'en assure aisément; et cependant ni 12 ni 35 ne peuvent être divisés par 14 ni par 10; c'est à cause de ce fait qu'il est avantageux d'introduire des *facteurs premiers*, comme nous le ferons plus tard.

II. DIVISIBILITÉ PAR 2, 5, 9, 3. PREUVE PAR 9

34. — On appelle caractère de divisibilité une règle qui permet, sans effectuer la division, de reconnaître si un nombre quelconque est divisible par un diviseur donné. On pourrait trouver des caractères de divisibilité pour tous les diviseurs, mais il est clair que cela ne serait guère utile, dans les cas où il serait plus long d'appliquer ces caractères que de faire la division. Nous nous bornerons à étudier les caractères de divisibilité par 2, 5, 9, 3; nous aurons d'ailleurs ainsi des exemples des deux méthodes principales par lesquelles s'obtiennent tous les caractères de divisibilité usuels; l'une de ces méthodes s'applique pour 2 et 5, l'autre pour 9 et 3.

35. **Divisibilité par 2 et par 5.** — Les caractères de divisibilité par 2 et par 5 s'obtiennent en remarquant que 10 est divisible par 2 et par 5; par suite, tout multiple de 10 est divisible par 2 et par 5. Soit 5 648 un nombre quelconque; on a :

$$5\,648 = 5\,640 + 8.$$

On peut donc décomposer 5 648 en une somme de deux parties, dont l'une 5 640 est un multiple de 10, et par suite un multiple de 2 et de 5; il suffit dès

lors de considérer la seconde partie 8 ; on constate que 8 est divisible par 2 ; donc la somme $5\,648 = 5\,640 + 8$ est divisible par 2 ; d'autre part 8 n'est pas divisible par 5 donc 5 648 n'est pas divisible par 5 car, si 5 divisait la somme 5 648, comme 5 divise 5 640, 5 diviserait 8. De même on verrait que $6\,745 = 6\,740 + 5$ est divisible par 5 et n'est pas divisible par 2 ; enfin, 6 750 ou 5 800 sont divisibles par 10, et par suite par 2 et par 5. On a donc la règle suivante :

RÈGLE. — *Un nombre est divisible par 2 lorsque son dernier chiffre à droite est 0, 2, 4, 6, 8 ; un nombre est divisible par 5 lorsque son dernier chiffre à droite est 0 ou 5.*

On peut justifier aussi cette règle par un exemple concret : *Paul possède un certain nombre de pièces de 10^{fr} et quelques pièces de 1^{fr} ; pourrait-il convertir tout son avoir en pièces de 2^{fr} ? ou en pièces de 5^{fr} ?*

Il est clair que chaque pièce de 10^{fr} peut être échangée contre 5 pièces de 2^{fr} ou contre 2 pièces de 5^{fr}. Pour que tout l'avoir de Paul puisse être converti en pièces de 2^{fr}, il faut que, en plus de ses pièces de 10^{fr}, ou bien il n'ait pas de pièces de 1^{fr}, ou bien il en ait un nombre équivalent à un nombre exacte de pièces de 2^{fr}, c'est-à-dire 2, 4, 6 ou 8. Le raisonnement est le même s'il veut convertir son avoir en pièces de 5^{fr}. On voit de plus que, s'il cherche à avoir le plus possible de pièces de 2^{fr} (ou bien de pièces de 5^{fr}, mais non des deux à la fois), le nombre de francs qui lui *reste* ne dépend pas du nombre de ses pièces de 10^{fr}, mais seulement du nombre de pièces de 1^{fr} qu'il avait en plus des

pièces de 10^{fr}. Or si Paul possède $3\,645^{fr}$ *ou* $4\,678^{fr}$, nous pouvons toujours supposer qu'il a 364 ou 467 pièces de 10^{fr}, plus 5^{fr} ou 8^{fr} en pièces de 1^{fr}. Ces observations conduisent à une règle qui complète la précédente.

Règle. — *Le reste de la division d'un nombre par 2 ou par 5 est égal au reste de la division par 2 ou par 5 de son dernier chiffre à droite.*

On voit que le succès de la méthode employée est due à ce que 2 et 5 sont des diviseurs de 10; on emploie une méthode analogue pour les caractères de divisibilité par 4 et 25, diviseurs de 100, par 8 et 125 diviseurs de 1000, etc. (voir exercice 47).

36. **Divisibilité par 9.** — *Jean possède* 2312^{fr} *et veut acheter le plus possible de livres d'une certaine collection, qui se vendent* 9^{fr} *chacun; combien lui restera-t-il de francs?* Il est clair que le nombre de francs qui lui restera est égal au reste de la division de 2312 par 9; nous nous proposons précisément de trouver ce reste sans effectuer la division; dans le cas où le reste serait égal à zéro, le nombre proposé[1] serait divisible par 9.

Supposons, pour simplifier le raisonnement, que les 2312 francs de Jean consistent en 2 billets de 1000^{fr}, 3 billets de 100^{fr}, 1 pièce de 10^{fr}, et 2 pièces de 1^{fr}. Pour 1 billet de 1000^{fr}, il pourra avoir 111 livres à 9^{fr}, qui coûtent 999^{fr}, et on lui rendra 1^{fr}; de même pour 1 billet de 100^{fr}, il peut avoir 11 livres à 9^{fr}, qui coûtent 99^{fr}, et on lui rend 1^{fr};

1. Il faut éviter de dire : 2312 *serait* divisible par 9; car 2312, nombre déterminé, *est* ou *n'est pas* divisible par 9; on ne peut employer le conditionnel en cette circonstance.

pour 1 pièce de 10^{fr}, il a 1 livre à 9^{fr}, et on lui rend 1^{fr}. Ainsi, pour chaque billet de $1\,000^{fr}$, pour chaque billet de 100^{fr}, pour chaque pièce de 10^{fr}, il a un certain nombre de livres à 9^{fr}, et on lui rend chaque fois 1^{fr}. Le nombre total de francs qu'il a ainsi, après ces achats, est donc égal à la somme des nombres de billets de 1000^{fr}, de billets de 100^{fr}, de pièces de 10^{fr}, et de pièces de 1^{fr} qu'il avait avant ses achats. Si, comme nous le supposons, il avait 2312^{fr} il lui reste, après ses achats $2 + 3 + 1 + 2 = 8^{fr}$. Le nombre 2312 n'est donc pas divisible par 9 et le reste de la division est 8.

Si Jean avait possédé 3475^{fr}, soit 3 billets de 1000^{fr}, 4 de 100^{fr}, 7 pièces de 10^{fr}, et 5 de 1^{fr}, il lui serait resté $3 + 4 + 7 + 5 = 19^{fr}$.

Avec ces 19^{fr}, il peut acheter 2 livres à 9^{fr}, et il lui reste 1^{fr}; le reste de la division de 3475 par 9 n'est pas 19; mais il est le même que le reste de la division de 19 par 9.

On voit que le nombre 19 est formé en ajoutant les nombres 3, 4, 7, 5, qui ne sont autres que les chiffres 3475, considérés isolément; d'où la règle :

Règle. — *Pour obtenir le reste de la division d'un nombre par 9, on calcule la somme de ses chiffres, considérés isolément; si cette somme est inférieure à 9, c'est le reste cherché; si elle est supérieure ou égale à 9, on la divise par 9, et le reste cherché est égal au reste de cette division.*

On remarquera que si la somme des chiffres du nombre proposé était un nombre élevé, on pourrait, pour obtenir le reste de la division de cette somme par 9, appliquer la règle précédente au lieu d'effectuer la division.

Bien que la règle de divisibilité résulte de la précédente, il n'est peut-être pas inutile de l'énoncer séparément.

Règle. — *Pour qu'un nombre soit divisible par 9, il faut et il suffit que la somme de ses chiffres, considérés isolément, le soit.*

On peut justifier les règles précédentes par un calcul tout à fait équivalent aux observations que nous avons faites. On remarque que l'on a :

$$10 = 9 + 1$$
$$100 = 99 + 1 = 9 \times 11 + 1$$
$$1\,000 = 999 + 1 = 9 \times 111 + 1$$
$$10\,000 = 9\,999 + 1 = 9 \times 1\,111 + 1.$$

Soit un nombre quelconque 34 572. On aura :

$$34\,572 = 3 \times 10\,000 + 4 \times 1\,000 + 5 \times 100 + 7 \times 10 + 2$$
$$= 3 \times 9 \times 1\,111 + 3 + 4 \times 9 \times 111 + 4 + 5 \times 9 \times 11 + 5 + 7 \times 9 + 7 + 2$$
$$= 9(3 \times 1\,111 + 4 \times 111 + 5 \times 11 + 7) + 3 + 4 + 5 + 7 + 2.$$

Or,

$$3 + 4 + 5 + 7 + 2 = 21 = 9 \times 2 + 3;$$

donc :

$$34\,572 = 9(3 \times 1\,111 + 4 \times 111 + 5 \times 11 + 7 + 2) + 3,$$

d'où l'on conclut que 3 est le reste de la division par 9 de 34 572 ; c'est bien le reste de la division par 9 de la somme 21 des chiffres $3 + 4 + 5 + 7 + 2$.

On emploie quelquefois, pour abréger l'écriture, la notation *mult.* 9 pour désigner le produit de 9 par un nombre entier, sans spécifier lequel ; nous allons employer cette notation dans l'étude de la divisibilité par 3, tout à fait analogue à la divisibilité par 9, et que l'on pourrait en déduire.

37. **Divisibilité par 3.** — On remarque que les nombres 9, 99, 999, etc., qui sont divisibles par 9, sont aussi divisibles par 3 ; on a donc :

$$10 = \text{mult. } 3 + 1$$
$$100 = \text{mult. } 3 + 1$$
$$1\,000 = \text{mult. } 3 + 1$$
$$10\,000 = \text{mult. } 3 + 1 ;$$

et ainsi de suite, quel que soit le nombre de zéros.

Considérons maintenant un nombre quelconque; nous nous appuierons sur le fait que le produit d'un mult. 3 par un nombre quelconque est aussi un mult. 3 (Th. III, p. 67) et que la somme de plusieurs mult. 3 est aussi un mult. 3. Nous écrirons donc :

$$60\,000 = 6 \times 10\,000 = \text{mult. } 3 + 6$$
$$5\,000 = 5 \times 1\,000 = \text{mult. } 3 + 5$$
$$400 = 4 \times 100 = \text{mult. } 3 + 4$$
$$10 = 1 + 10 = \text{mult. } 3 + 1$$
$$2 = 2$$

d'où, en ajoutant :

$$65\,412 = 60\,000 + 5\,000 + 400 + 10 + 2$$
$$= \text{mult. } 3 + 6 + 5 + 4 + 1 + 2.$$

Le reste de la division par 3 de 65412 est donc le même que le reste de la division par 3 de la somme $6 + 5 + 4 + 1 + 2$; cette somme 18 est divisible par 3; il en est donc de même du nombre proposé.

Nous n'énoncerons pas la règle de la divisibilité par 3; il suffit de remplacer 9 par 3 dans les règles relatives à 9. Il est clair que tout nombre divisible par 9 est divisible par 3, mais la réciproque n'est pas vraie.

38. **Preuve par 9.** — On donne le nom de *preuve par* 9 à une règle qui permet de reconnaître parfois des erreurs de calcul; dans le cas où la *preuve par* 9 ne se fait pas exactement, cela *prouve* que le calcul est inexact (ou que l'on s'est trompé en faisant la preuve); mais, dans le cas où elle se fait exactement, cela ne *prouve* nullement que le calcul est exact; de sorte que cette preuve ne prouve rien dans le cas précisément où il serait le plus intéressant de prouver quelque chose.

Nous nous bornerons à exposer la preuve par 9 pour la multiplication : c'est le cas où elle est le plus usitée, si tant est qu'elle soit parfois usitée; nous indiquerons aux exercices, en laissant à l'élève le soin de les démontrer, les preuves par 9 de l'addition, de la soustraction et de la division; si elles ne sont pas utiles comme *preuves*, ce sont du moins d'intéressantes applications de la théorie de divisibilité.

Nous allons étudier la question suivante : *Jean, Pierre et Jacques ont multiplié tous trois* 3 917 *par* 642; *Jean a trouvé* 2 514 724, *Pierre* 2 514 714, *et Jacques* 399 534, *que doit-on penser de ces résultats?*

Nous remarquerons que l'on a, d'après ce qui précède :

$$3\,197 = \text{mult. } 9 + 3 + 9 + 1 + 7 = \text{mult. } 9 + 2$$
$$642 = \text{mult. } 9 + 6 + 4 + 2 = \text{mult. } 9 + 3$$

Il en résulte :

$$3917 \times 642 = (\text{mult. } 9 + 2)(\text{mult. } 9 + 3) = \text{mult. } 9 + 6$$

En effet, pour multiplier la somme mult. $9 + 2$ par mult. $9 + 3$, nous pouvons la multiplier d'abord

par mult. 9, ensuite par 3, et ajouter les résultats; la première opération nous donne un mult 9; quant au produit par 3 de mult. $9 + 2$, il est égal au produit par 3 de mult. 9 c'est-à-dire à un mult. 9, augmenté du produit de 2 par 3, c'est-à-dire de 6; nous avons donc finalement mult. $9 + 6$. Le produit est donc un mult. $9 + 6$; *le reste de la division par 9 du produit est 6.*

Recherchons directement les restes de la division par 9 des 3 nombres trouvés; Jean a trouvé 2 514 724; on a :

$$2 + 5 + 1 + 4 + 7 + 2 + 4 = 25 = 2 \times 9 + 7;$$

nous pouvons donc affirmer que ce résultat est inexact. Pour le nombre de Pierre 2 514 714, on a :

$$2 + 5 + 1 + 4 + 7 + 1 + 4 = 24 = 2 \times 9 + 6;$$

et pour celui de Jacques 399 534, on a :

$$3 + 9 + 9 + 5 + 3 + 4 = 3 \times 9 + 6;$$

donc la *preuve par* 9 nous laisse indécis; elle ne nous permet d'affirmer l'inexactitude, ni du résultat de Pierre, ni de celui de Jacques. Si l'on regarde de près leurs opérations, on constate que Jacques a disposé la sienne ainsi :

```
  3 917
    642
  -----
  7 834
 15 668
 23 502
-------
399 534
```

c'est-à-dire a mal placé le 3e produit partiel; il a

ainsi remplacé $23\,502 \times 100$ par $23\,502 \times 10$; il a retranché du résultat $23\,502 \times 90$, c'est-à-dire un multiple de 9; c'est pour cela que la preuve par 9 ne décèle pas son erreur.

Nous terminerons en énonçant la règle.

Règle. — *Pour faire la preuve par 9 d'une multiplication, on cherche le reste de la division par 9 du multiplicande et du multiplicateur; on effectue le produit de ces deux restes, et l'on prend le reste de sa division par 9; ce reste doit être égal au reste de la division par 9 du nombre trouvé au produit; si ces deux restes ne sont pas égaux, l'opération est inexacte; s'ils sont égaux, on peut affirmer que, si l'on a fait une erreur, cette erreur est un multiple de 9.*

III. PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR ET PLUS PETIT COMMUN MULTIPLE

39. **Plus grand commun diviseur de deux nombres.** — Définition. — *On appelle*[1] *p. g. c. d. de deux nombres le plus grand nombre qui les divise tous les deux :* c'est le *plus grand* des *diviseurs* qui sont *communs* à ces deux nombres, de leurs *diviseurs communs.*

Par exemple, les nombres 48 et 36 sont divisibles tous deux par 2, 3, 4, 6, 12; ce sont là leurs *diviseurs communs;* 12 est leur p. g. c. d.; les nombres 21 et 28 sont tous deux divisibles par 7; 7 est leur p. g. c. d.; les nombres 41 et 15 n'ont pas de diviseur commun autre que 1; car 1 divise tous les

1. On écrit, pour abréger, p. g. c. d., au lieu de plus grand commun diviseur.

nombres; leur p. g. c. d. est 1; on dit qu'ils sont *premiers entre eux*.

Définition. — *On dit que deux nombres sont premiers entre eux lorsque leur p. g. c. d. est égal à l'unité.*

La recherche du p. g. c. d. se base sur les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Étant donnés deux nombres, si le plus grand est divisible par le plus petit, leur p. g. c. d. est égal à ce plus petit.*

Soient, en effet, les nombres 48 et 12; leur p. g. c. d. ne peut pas être plus grand que 12, puisqu'il doit diviser 12; d'ailleurs 12 divise 48 et divise aussi 12, car $48 = 12 \times 4$ et $12 = 12 \times 1$; donc 12 est le p. g. c. d. de 48 et de 12.

Théorème II. — *Étant donnés deux nombres, tels que le plus grand ne soit pas divisible par le plus petit, leur p. g. c. d. est égal au p. g. c. d. du plus petit et du reste de la division du plus grand par le plus petit.*

Soient les deux nombres 516 et 48; on a :

$$516 = 48 \times 10 + 36.$$

Il s'agit de montrer que le p. g. c. d. de 516 et de 48 est égal au p. g. c. d. de 48 et de 36.

Pour cela, montrons d'abord que tout diviseur commun de 516 et de 48 est aussi diviseur commun de 48 et de 36, et réciproquement. En effet, 2 divise 516 et 48; il divise donc 48×10; divisant 516 et 48×10, il divise 36 (Th. II *bis*, p. 67); de même 6 divise 36 et 48; il divise donc 48×10 et par suite 516, somme de 48×10 et de 36.

Donc les *diviseurs communs de 516 et de 48 sont*

les mêmes que les diviseurs communs de 48 et de 36; si l'on forme deux tableaux contenant l'un les diviseurs communs de 516 et de 48, l'autre, les diviseurs communs de 48 et de 36, ces deux tableaux renfermeront les mêmes nombres; par suite le plus grand nombre de l'un de ces tableaux est le même que le plus grand nombre de l'autre tableau; en d'autres termes, le p. g. c. d. de 516 et de 48 est égal au p. g. c. d. de 48 et de 36; C. Q. F. D.

On déduit de ces deux théorèmes la règle pratique suivante.

Règle. — *Pour obtenir le p. g. c. d. de deux nombres, on divise le plus grand par le plus petit; si la division se fait exactement, le p. g. c. d. est égal au plus petit; sinon, on est ramené à rechercher le p. g. c. d. du plus petit et du reste de la division déjà faite; pour cela, on divise le plus petit par ce reste; si la division se fait exactement, ce reste est le p. g. c. d.; sinon on est ramené à rechercher le p. g. c. d. du reste de cette seconde division, ou second reste, et du diviseur de cette seconde division, c'est-à-dire du premier reste; pour cela on divise le premier reste par le second reste, et on continue de la même manière jusqu'à ce que l'on arrive à une division se faisant exactement; le diviseur de cette dernière division est le p g c. d. cherché.*

Appliquons cette règle à la recherche du p. g. c. d. de 12 012 et de 4 152; on dispose pratiquement l'opération comme il suit :

	2	1	8	2	1	5	2
12 012	4 152	3 708	444	156	132	24	12
3 708	444	156	132	24	12	0	

On écrit le quotient de chaque division au-dessus du diviseur, afin de pouvoir utiliser ce diviseur comme dividende de la division suivante sans avoir à le transcrire; le quotient de 12 012 par 4 152 est 2 et le reste est 3 708; le quotient de 4 152 par 3 708 est 1 et le reste est 444, etc. Le p. g. c. d. cherché est 12.

Prenons les nombres 1 713 et 170 on aura la disposition suivante :

	10	13	13
1 713	170	13	1
13	40 1	0	

Le p. g. c. d. est 1, dernier diviseur employé; il aurait été inutile d'effectuer la dernière division; dès qu'on a obtenu le reste 1 on est certain que les nombres donnés sont premiers entre eux.

40. **Propriétés du p. g. c. d. de deux nombres.** — Reprenons les nombres 12 012 et 4 152, qui nous ont servi d'exemple, et soit 2 l'un de leurs diviseurs communs; ce diviseur commun divise le reste de leur division 3 708; divisant 4 152 et 3 708, il divise le reste de leur division 444; on voit de même qu'il divise 156, 132, 24, 12, c'est-à-dire qu'il divise le p. g. c. d. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant, conséquence de la méthode même employée pour obtenir le p. g. c. d.

Théorème III. — *Tout nombre qui en divise deux autres divise leur p. g. c. d.*

On démontre de même le théorème suivant :

Théorème IV. — *Lorsqu'on multiplie ou divise deux nombres par un troisième, leur p. g. c. d. est multiplié ou divisé par ce troisième.*

Comme nous l'avons dit au chapitre précédent pour des théorèmes analogues (théorèmes I et II, p. 51 à 54), ce théorème s'énoncerait correctement de la manière suivante; *si l'on considère d'une part deux nombres et leur p. g. c. d. et d'autre part, deux autres nombres et leur p. g. c. d., si ces autres nombres sont respectivement égaux aux produits des deux premiers par un même facteur, leur p. g. c. d. est égal au produit par ce facteur du p. g. c. d. des premiers nombres.*

Par exemple nous avons trouvé que 12012 et 4152 ont pour p. g. c. d. 12; 120120 et 41520 ont pour p. g. c. d. 120 et 12012 : 12 = 1001 et 4152 : 12 = 346 ont pour p. g. c. d. 1. Pour démontrer ce théorème, il suffit de se reporter au tableau des divisions successives et de remarquer que, si l'on part de 2 nombres 10 fois plus grands, tous les restes seront 10 fois plus grands, les quotients étant les mêmes; par suite le p. g. c. d. qui est le dernier reste non nul, sera 10 fois plus grand.

En particulier, si l'on divise deux nombres par leur p. g. c. d. on obtient deux nombres dont le p. g. c. d. est 1, c'est-à-dire qui sont premiers entre eux.

THÉORÈME V. — *Les quotients de deux nombres par leur p. g. c. d. sont premiers entre eux.*

41. **P. g. c. d. de plusieurs nombres.** — DÉFINITION. — *On appelle p. g. c. d. de plusieurs nombres le plus grand nombre qui les divise tous exactement*, c'est-à-dire le plus grand de leurs diviseurs communs.

La recherche du p. g. c. d. de plusieurs nombres est basée sur le théorème suivant.

THÉORÈME VI. — *Pour trouver le p. g. c. d. de*

plusieurs nombres, on peut remplacer deux de ces nombres par leur p. g. c. d. Cet énoncé signifie exactement ceci : *si l'on considère un premier système de plusieurs nombres et que l'on forme un second système de plusieurs nombres différant du premier en ce point seulement, que deux des nombres y sont remplacés par leur p. g. c. d., le p. g. c. d. des nombres du second système est le même que le p. g. c. d. des nombres du premier système.*

Soient, par exemple, les nombres 240, 360, 660, 144; le p. g. c. d. de 240 et de 360 est 120; nous voulons démontrer que le p. g. c. d. des nombres donnés est le même que le p. g. c. d. de 120, 660, 144. Pour cela, nous allons faire voir que tout diviseur commun à 240, 360, 660, 144 est diviseur commun à 120, 660, 144, et réciproquement. Or cela résulte immédiatement de ce que 1° tout diviseur commun à 240 et 360 divise leur p. g. c. d. 120 et que 2° tout diviseur de 120 divise ses multiples 240 et 360.

On ramène ainsi la recherche du p. g. c. d. des quatre nombres proposés à la recherche du p. g. c. d. de trois nombres; on ramènera de même la recherche du p. g. c. d. de ces trois nombres à la recherche du p. g. c. d. de deux nombres; il suffira de remplacer 120 et 660 par leur p. g. c. d. 60; il ne reste plus qu'à rechercher le p. g. c. d. de 60 et de 144, qui est 12.

Règle. — *Pour trouver le p. g. c. d. de plusieurs nombres, on recherche le p. g. c. d. des deux premiers, puis le p. g. c. d. de ce premier p. g. c. d. et du troisième nombre, puis le p. g. c. d. de ce second p. g. c. d. et du quatrième nombre, et ainsi*

de suite jusqu'à épuisement de tous les nombres; le dernier p. g c. d. calculé est le p. g. c. d. des nombres donnés.

On déduit facilement de cette règle des théorèmes analogues à ceux que l'on a démontrés pour le p. g. c. d. de deux nombres.

42. **Plus petit commun multiple.** — On appelle[1] p. p. c. m. de deux ou plusieurs nombres le plus petit de leurs multiples communs, c'est-à-dire le plus petit nombre qui est divisible à la fois par tous ces nombres.

Nous énoncerons sans démonstrations les règles et propriétés concernant le p. p. c. m. Nous indiquerons d'ailleurs, dans le chapitre suivant, une autre méthode, souvent plus pratique, pour calculer le p. g. c. d. et le p. p. c. m.

Règle. — *Le p. p. c. m. de deux nombres est égal au quotient de leur produit par leur p. g. c d.*

Ainsi, soient les nombres 12 012 et 4 152, dont le p. g. c. d. est 12; leur p. p. c. m. est égal à $(12\,012 \times 4\,152) : 12 = 1\,001 \times 4\,152 = 4\,152\,000 + 4\,152 = 4\,156\,152$.

Règle. — *Le p. p. c. m. de plusieurs nombres peut s'obtenir comme il suit : on calcule le p p. c. m. des deux premiers, puis le p. p. c. m. de ce premier p. p. c. m. et du troisième nombre, puis le p. p. c. m. de ce second p. p. c. m. et du quatrième nombre, et ainsi de suite, jusqu'à épuisement de tous les nombres donnés; le dernier p. p. c. m. calculé est le p. p. c. m. cherché.*

Théorème. — *Tous les multiples communs de*

---

1. On écrit p. p. c. m. pour *plus petit commun multiple.*

deux ou plusieurs nombres sont des multiples de leur p. p. c. m.

43. **Applications du p. g. c. d. et du p. p. c. m.** — Indépendamment de l'importance du p. g. c. d. et du p. p. c. m dans des parties ultérieures de l'arithmétique, importance dont nous aurons quelques exemples, ces nombres fournissent souvent la solution de problèmes pratiques. Indiquons-en quelques-uns.

Problème I. — *On a 52 billes et on désire faire jouer 24 enfants; comment peut-on partager les enfants en groupes égaux, de manière que chaque groupe ait le même nombre de billes, ces groupes étant aussi nombreux que possible?* Le nombre des groupes doit être un diviseur de 52 et de 24; on doit donc, pour que ces groupes soient aussi nombreux que possible, prendre le p. g. c. d., que l'on trouve aisément être égal à 4; il y aura donc 4 groupes de 6 enfants et chaque groupe aura 13 billes.

Problème II. — *On a 36 roses blanches et 48 roses rouges; on désire faire le plus possible de bouquets, de manière que dans chaque bouquet il y ait un même nombre de roses blanches, et un même nombre de roses rouges.* Le nombre des bouquets doit être le p. g. c. d. de 36 et de 48; c'est 12; on aura 12 bouquets composés chacun de 3 roses blanches et de 4 roses rouges.

Problème III. — *Jean a un certain nombre de pièces de 10 sous, et point d'autre monnaie; il va chez un marchand qui n'a pas non plus de monnaie pour acheter des cahiers qui se vendent 8 sous pièce. Quel est le plus petit nombre de cahiers qu'il peut*

acheter? La dépense de Jean évaluée en sous doit être un multiple de 10, puisqu'il n'a que des pièces de 10 sous, et être aussi un multiple de 8, puisque chaque cahier coûte 8 sous; s'il veut dépenser le moins possible, sa dépense devra être égale au p. p. c. m. de 10 et de 8, qui est 40; effectivement, pour 4 pièces de 10 sous, il aura 5 cahiers.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE V

47. — Démontrer que le reste de la division d'un nombre par 4 ou par 25 est le même que le reste de la division par 4 ou par 25 du nombre formé par ses deux derniers chiffres à droite.

48. — Quels sont les restes de la division par 2, 3, 4, 5, 9, 25 des nombres suivants :

36, 375, 2 003, 3 651, 434 257,
32 578, 111 111, 1 111 122,
123 456 789, 987 654 321.

49. — Montrer que les nombres 11, 99, 1 001, 9 999, 100 001, 999 999, etc., sont divisibles par 11; en déduire un caractère de divisibilité par 11.

50. — Trouver le p. g. c. d. de 68 532 et 23 451.

51. — Trouver le p. g. c. d. de 111 111 et 1 111.

52. — Trouver le p. g. c. d. de 10 000 001 et 10 001.

53. — Trouver le p. g. c. d. de 1 000 000 001 et 1 000 001.

54. — Trouver le p. p. c. m. de 24, 36, 60, 100.

55. — Dans une bicyclette à chaîne le petit pignon a 8 dents et le grand pignon en a 18. Quel est le plus petit nombre de coups de pédale après lequel le pédalier et la roue d'arrière reprennent tous deux leur position primitive?

56. — Dans une voiture les roues d'avant ont 3^m de circonférence et les roues d'arrière 4^m; quel chemin minimum faut-il parcourir pour que chaque paire de roues ait fait un nombre exact de tours?

57. — Les paquebots d'une première ligne quittent le port tous les 12 jours et les paquebots d'une seconde ligne le quittent tous les 28 jours; sachant qu'il y a eu un départ pour les deux lignes le 1er janvier 1903, on demande à quelle date il est arrivé de nouveau pour la première fois, que les départs ont eu lieu le même jour.

58. — Pour faire la preuve par 9 d'une addition il suffit de vérifier que le reste de la division par 9 de la somme est égal au reste de la division par 9 de la somme des restes des divisions par 9 des termes de la somme. Faire la preuve par 9 des additions des exercices 1, 2, 3.

59. — Faire la preuve par 9 des soustractions des exercices 10 et 14.

60. — Faire la preuve par 9 des multiplications des exercices 18 à 24.

61. — La preuve par 9 d'une division se fera comme il suit; soient a, b, c, d les restes respectifs des divisions par 9 du dividende, du diviseur, du quotient et du reste; on vérifie que le reste de la division par 9 de $bc + d$ est a.

62. — Faire la preuve par 9 des divisions des exercices 34, 35, 36.

CHAPITRE VI

NOMBRES PREMIERS

I. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS DES NOMBRES PREMIERS

44. **Définition des nombres premiers.** — *On appelle nombre premier un nombre qui n'admet pas d'autres diviseurs que lui-même et l'unité.* Ainsi 7 est un nombre premier, 11 est un nombre premier; 6 n'est pas un nombre premier.

Il ne faut pas confondre la définition que nous venons de donner avec celle des *nombres premiers entre eux;* on appelle quelquefois les nombres premiers, tels que nous venons de les définir, *nombres premiers absolus*. On veut marquer par le qualificatif *absolu* que la propriété qu'a un nombre d'être premier ne dépend que de ce nombre lui-même et n'est pas relative à d'autres nombres. 7 est premier; 11 est premier; au contraire 6 et 35 sont *premiers entre eux* ou, comme on dit aussi, 6 *est premier à* (ou *avec*) 35; 35 *est premier à* 6; mais 6 n'est pas premier avec 12; 35 n'est pas premier à 10.

45. Problème. — **Reconnaître si un nombre est**

premier. — Soit le nombre 127; nous nous proposons de reconnaître s'il est premier; nous apercevons immédiatement, d'après les caractères de divisibilité, que 127 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5. Il n'est pas divisible par 4 ou 6, car s'il l'était, il serait divisible par 2; on a $127 = 7 \times 18 + 1$, 127 n'est donc pas divisible par 7; il n'est pas divisible par 8, 9, 10, car s'il était divisible par 8 ou 10, il serait divisible par 2, et s'il était divisible par 9, il serait divisible par 3; 127 n'est pas non plus divisible par 11 car on a $127 = 11 \times 11 + 6$. Ainsi 127 n'est divisible par aucun des 11 premiers nombres et son quotient par 11 par défaut est 11. Je dis qu'il en résulte que 127 est premier; en effet, si 127 n'était pas premier, on pourrait le décomposer en un produit de deux facteurs, et ces deux facteurs ne pourraient pas être tous deux supérieurs à 11 car le produit 11×12 étant supérieur à 127, il en est de même, à plus forte raison, du produit de deux nombres supérieurs à 11; donc si 127 n'était pas premier, 127 admettrait un diviseur inférieur à 11, et nous avons constaté qu'il n'en est pas ainsi.

Si l'on remarque que le raisonnement précédent est basé sur le fait que le quotient par défaut de 127 par 11 n'est pas supérieur à 11; et si l'on observe, de plus, que, pour tout diviseur non premier, on peut raisonner comme nous l'avons fait plus haut pour 4, 6, 8, 9, 10, on pourra énoncer la règle suivante.

Règle. — *Pour reconnaître si un nombre est premier, il suffit de le diviser successivement par les nombres premiers* 2, 3, 5, 7, 11,... *jusqu'à ce que le*

quotient par défaut ne soit pas supérieur au diviseur employé. Si aucune division ne s'est faite exactement, le nombre proposé est premier.

On voit qu'il résulte de la manière même dont on a obtenu cette règle que *tout nombre non premier admet au moins un diviseur premier;* car, si l'on essaie successivement comme diviseurs tous les nombres 2, 3, 4, 5, 6,... il n'est pas possible que la première division qui se fait exactement ait un diviseur non premier; sinon, une division antérieure se serait faite exactement : ainsi *le plus petit des diviseurs d'un nombre est toujours premier.*

La règle précédente permet de reconnaître si un nombre inférieur à 10 000 est premier, lorsque l'on connaît les nombres premiers inférieurs à 100; car un nombre inférieur à 10 000 ne peut pas être le produit de deux facteurs tous deux plus grands que 100. On arrive facilement à connaître les nombres premiers plus petits que 100; on peut remarquer à cet égard que $7 \times 7 = 49$, $7 \times 11 = 77$, $7 \times 13 = 91$ sont les seuls nombres inférieurs à 100 qui ne soient pas premiers et qui ne soient divisibles ni par 2, ni par 3, ni par 5. *Si donc on fait exception*[1] *pour* 49, 77, 91, *l'application des règles de divisibilité par* 2, 3 *et* 5 *permet de reconnaître si un nombre inférieur à 100 est premier ou non.*

46. **Tables de nombres premiers.** — Le procédé que nous venons d'indiquer est fort long à appliquer pour les nombres qui ont plus de 3 chiffres et devient presque impraticable pour les nombres de

1. On sait d'habitude que 49 est égal à 7 fois 7 et que 77 est égal à 7 fois 11; *il importe de savoir aussi que* 91 *est égal à* 7 *fois* 13; c'est la somme de 70 et de 21.

5 ou 6 chiffres. Aussi a-t-on construit des *tables de nombres premiers*, c'est-à-dire des listes imprimées faisant connaître tous les nombres premiers, pour les nombres non premiers, ces tables donnent généralement la valeur du plus petit diviseur de chacun d'eux; elles peuvent ainsi être utilisées pour la décomposition des nombres en facteurs premiers, que nous étudierons bientôt.

Pour construire une telle table, on peut employer le procédé suivant, connu sous le nom de crible d'Eratosthène; voici en quoi il consiste, formons un tableau rectangulaire dont chaque case corresponde à un nombre; les nombres y seront rangés d'une manière régulière, comme ci-contre, de telle manière qu'il ne soit même pas nécessaire de les écrire pour savoir quel nombre correspond à chaque case; on a écrit simplement les 3 premières lignes, qui contiennent ces nombres jusqu'à 29 et on s'est contenté de numéroter les lignes suivantes, qui renfermeraient les nombres de 30 à 129.

Cela fait, abstraction faite de 0 et 1, le premier nombre 2 est certainement premier; les nombres de 2 en 2 sont divisibles par 2 et 2 est leur plus petit diviseur; nous inscrirons donc le diviseur 2, en petits caractères dans les cases de 2 en 2; les nombres qui correspondent à ces cases admettent 2 comme plus petit diviseur; le nombre 3 qui vient après 2 est aussi premier; nous l'inscrirons de même dans les cases de 3 en 3, à partir de celle qu'il occupe; ainsi dans les cases 6, 9, 12, 15, 18, 21, etc.; ces nombres sont divisibles par 3. Si l'on veut avoir seulement le plus petit diviseur de chaque nombre, on n'inscrira pas 3 dans les cases

	0	1	2	3	4 2	5	6 2	7	8 2	9 3
1	10 2	11	12 2	13	14 2	15 3	16 2	17	18 2	19
2	20 2	21 3	22 2	23	24 2	25 5	26 2	27 3	28 2	29
3	2		2	3	2	5	2		2	3
4	2		2		2	3	2		2	7
5	2	3	2		2	5	2	3	2	
6	2		2	3	2	5	2		2	3
7	2		2		2	3	2	7	2	
8	2	3	2		2	5	2	3	2	
9	2	7	2	3	2	5	2		2	3
10	2		2		2	3	2		2	
11	2	3	2		2	5	2	3	2	7
12	2	11	2	3	2	5	2		2	3

où se trouve déjà inscrit 2; c'est ce que nous avons fait, pour ne pas trop surcharger le tableau. Le nombre 4, qui suit 3, n'est pas premier, car le diviseur 2 est déjà inscrit dans sa case, on prendra le nombre suivant 5 que l'on inscrira dans les cases de 5 en 5, à partir de celle qu'il occupe; nous l'avons inscrit seulement dans les cases où n'étaient inscrits ni 2 ni 3. On prendra de même le premier nombre suivant 5 et dans la case duquel n'est inscrit aucun diviseur : c'est 7, qui est forcément premier, puisqu'il n'est divisible par aucun des nombres précédents, et l'on inscrira 7 dans les cases de 7 en 7.

Les cases dans lesquelles ne se trouve inscrit aucun diviseur correspondent aux nombres premiers

Nous nous contenterons d'énoncer les remarques suivantes, laissant à l'élève le soin de : 1° les vérifier; 2° les démontrer :

Lorsqu'on procède comme nous venons de dire, la première des cases dans lesquelles est inscrit chaque nombre premier correspond au carré de ce nombre; ainsi 7 est inscrit pour la première fois dans la case qui correspond à 49.

On pourrait procéder de la même manière, en s'évitant la peine d'écrire les nombres pairs; les multiples de 3 se trouveraient encore de 3 en 3, les multiples de 5 seraient de 5 en 5, etc.

Mais il ne serait pas possible de n'écrire que les nombres qui ne sont divisibles ni par 2 ni par 3; les multiples de 5 ne se trouveraient plus de 5 en 5.

Il a été construit des tables très étendues de nombres premiers et de diviseurs; il en est qui s'étendent jusqu'à plusieurs millions.

Lorsqu'on construit de telles tables, on s'aperçoit que l'on rencontre toujours des nombres premiers, de plus en plus grands; on est donc conduit à se demander si le nombre des nombres premiers est limité, ou, si au contraire, il en existe indéfiniment. La réponse à cette question est connue depuis longtemps; elle est fournie par le théorème suivant :

Théorème. — *La suite des nombres premiers est illimitée.*

Ce théorème signifie qu'un nombre premier étant donné, il existe un nombre premier plus grand que lui. Par suite, d'après le théorème, il existe un troisième nombre premier plus grand que celui-là, puis un quatrième plus grand que le troisième, puis un cinquième plus grand que le quatrième, et ainsi de suite, *indéfiniment*.

Ainsi, pour démontrer que la suite des nombres premiers est illimitée, il suffit de montrer qu'il existe un nombre premier plus grand qu'un nombre premier donné, par exemple, plus grand que 11, *mais, à condition de le démontrer au moyen d'un raisonnement d'une forme générale, c'est-à-dire d'un raisonnement qui, par sa nature, s'appliquerait sous la même forme à tout autre nombre premier.* Cette remarque est indispensable pour faire bien comprendre le sens de la proposition précédente.

Bien que la démonstration ne soit pas exigée par le programme, nous allons la donner, à cause de sa simplicité.

Il s'agit de prouver qu'il existe un nombre premier plus grand que 11; pour cela effectuons le produit

$$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 2310$$

des nombres premiers jusqu'à 11, y compris 11, et ajoutons 1 à ce produit, nous obtenons 2311; si nous divisons 2311 par 3, par exemple, nous obtiendrons comme quotient $2\times5\times7\times11$ et comme reste 1; en effet, on a d'après l'égalité précédente :

$$2311=(2\times5\times7\times11)3+1,$$

donc 2311 n'est pas divisible par 3; et le même raisonnement montre que 2311 n'est divisible par aucun des nombres 2, 5, 7, 11; donc 2311 est premier, ou bien admet un diviseur premier supérieur à 11; dans les deux cas, nous obtenons un nombre premier supérieur à 11. C. Q. F. D.

II. DÉCOMPOSITION DES NOMBRES EN FACTEURS PREMIERS

47 **Décomposition d'un nombre en facteurs premiers.** — La plus importante application élémentaire des nombres premiers est la *décomposition en facteurs premiers*. Décomposer un nombre en facteurs premiers, c'est trouver un produit de facteurs premiers égal à ce nombre; ainsi, en écrivant :

$$70=2\times7\times5$$
$$240=2\times5\times2\times3\times2\times2$$
$$36=2\times3\times2\times3,$$

on a décomposé en facteurs premiers les nombres 70, 240, 36. On a l'habitude d'écrire les produits de facteurs premiers en rangeant les facteurs dans l'ordre croissant; on écrira ;

$$70 = 2 \times 5 \times 7$$
$$240 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^4 \times 3 \times 5$$
$$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2.$$

On emploie la notation des exposants pour désigner le produit de plusieurs facteurs égaux; tout nombre est ainsi le produit de certains facteurs premiers, chacun de ces facteurs étant affecté d'un exposant qui indique combien de fois il est répété. Un facteur qui n'a pas d'exposant doit être regardé comme ayant pour exposant 1, car il figure 1 fois dans le produit.

Règle. — *Pour décomposer un nombre en facteurs premiers, on le divise par son plus petit diviseur, que l'on inscrit; on divise le quotient par son plus petit diviseur, que l'on inscrit à la suite du précédent; on divise le nouveau quotient par son plus petit diviseur, que l'on inscrit encore, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on parvienne à un quotient égal à l'unité; les nombres inscrits sont les facteurs premiers du nombre proposé; ils se trouvent rangés en ordre croissant.*

Dans le cas où l'on possède une table donnant le plus petit diviseur de chaque nombre, on n'a qu'à se servir de cette table et à effectuer des divisions; si l'on ne possède pas une telle table, on essaie successivement comme diviseurs les nombres premiers successifs 2, 3, 5, 7, 11, etc., soit en effectuant la division, soit en utilisant les caractères de divisibilité que l'on peut connaître. Il est important de remarquer que dans ces essais, on n'a jamais à revenir en arrière, c'est-à-dire à essayer un nombre plus petit que les nombres déjà essayés, car le

quotient ne peut pas admettre un diviseur que n'admettait pas le dividende.

On dispose généralement l'opération comme ceci ; soit proposé le nombre 31 620 :

31 620	2
15 810	2
7 905	3
2 635	5
527	17
31	31
1	

527	11
87	4

527	13
07	4

527	17
17	31
0	

31 620 admet le diviseur 2, que l'on inscrit à droite ; le quotient est 15 810 ; 15 810 admet encore le diviseur 2 que l'on inscrit à droite ; le quotient 7 905 n'est pas divisible par 2, mais est divisible par 3 ; on inscrit le diviseur 3 à droite de 7 905 et le quotient 2 635 au-dessous ; 2 635 n'admet pas le diviseur 3 (il est inutile, d'après la remarque faite, de revenir en arrière pour se préoccuper de 2), mais admet le diviseur 5 ; on inscrit 5 et le quotient 527. Ce quotient 527 n'est pas divisible par 5 (on n'a plus à s'inquiéter de 2 ni de 3) ; il n'est pas divisible par 7, car il est égal à $520 + 7$ et 520 n'est pas divisible par 7, car $7 \times 70 = 490$ et $520 - 490 = 30$ n'est pas divisible par 7 ; les nombres premiers suivants sont 11, 13, 17, des divisions auxiliaires nous montrent que 527 n'est pas divisible par 11 et 13 mais l'est par 17[1] ; le quotient 31 est

1. On remarque qu'il est inutile d'achever les divisions auxiliaires qui n'aboutissent pas ; il suffit de s'assurer qu'elles n'aboutissent pas ; 87 n'est pas divisible par 11 et 7 n'est pas divisible par 13.

premier et n'admet par suite que le diviseur 31 ; la décomposition est achevée; l'on a :

$$31\,620 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 17 \times 31.$$

48. **Théorème fondamental**. — *Un nombre ne peut être décomposé que d'une seule manière en un produit de facteurs premiers.*

Cette proposition donne la raison de l'importance des nombres premiers et est la clef de leurs principales applications. On peut l'énoncer sous une autre forme équivalente :

Autre énoncé du théorème fondamental. — *Pour que deux produits de facteurs premiers soient égaux, il faut qu'ils soient composés des mêmes facteurs, chaque facteur ayant le même exposant dans les deux produits.* D'ailleurs, il est évident que cette condition nécessaire est aussi suffisante. On peut dire aussi que *deux produits de facteurs premiers ne peuvent être égaux qu'à condition d'être identiques*

Nous ne démontrerons pas le théorème fondamental; les élèves se convaincront aisément de son exactitude en essayant de décomposer en facteurs premiers des nombres simples et en constatant qu'il n'est pas possible de trouver deux décompositions différentes pour un même nombre.

Il n'est pas inutile d'observer que ce théorème exprime une propriété *caractéristique* des produits de facteurs premiers, c'est-à-dire que des produits de facteurs *non premiers* peuvent fort bien être égaux sans être identiques; on a, par exemple :

$$2 \times 6 = 3 \times 4,$$

mais 6 et 4 ne sont pas premiers.

49. Applications à la divisibilité. RÈGLE. — *Lorsque plusieurs nombres sont mis sous la forme de produits de facteurs premiers, le produit de ces nombres est égal à un produit de facteurs premiers qu'on obtient comme il suit : on prend les divers facteurs premiers qui figurent dans les produits donnés et l'on affecte chacun d'eux d'un exposant égal à la somme des exposants qu'il a dans ces produits donnés.*

Soient par exemple, les nombres suivants :

$$24 = 2^3 \times 3$$
$$90 = 2 \times 3^2 \times 5$$
$$35 = 5 \times 7.$$

Le produit de ces nombres renferme les divers facteurs premiers 2, 3, 5, 7, qui figurent dans les produits donnés; l'exposant de 2 doit être égal à $3 + 1 = 4$, puisqu'il est égal à 3 dans 24, à 1 dans 90 et que 2 ne figure pas dans 35; de même l'exposant de 3 doit être $1 + 2 = 3$, l'exposant de 5 doit être $1 + 1 = 2$ et l'exposant de 7 doit être 1; on a donc, en définitive :

$$24 \times 90 \times 35 = 2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 7.$$

JUSTIFICATION DE LA RÈGLE. — Pour justifier la règle précédente il suffit d'appliquer les propositions relatives au produit de plusieurs facteurs (n° 16) et la définition des exposants; on a :

$$\begin{aligned} 24 \times 90 \times 35 &= 2^3 \times 3 \times 2 \times 3^2 \times 5 \times 5 \times 7 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \\ &= 2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 7. \end{aligned}$$

L'exposant final de 2 est égal au nombre de fois que figurait le facteur 2 dans le produit développé écrit sur la troisième ligne, et ce nombre est évidemment égal à la somme des nombres de fois que figurait 2 dans les produits donnés, c'est-à-dire à la somme des exposants de 2 dans ces produits; de même pour les autres facteurs.

La division étant l'opération inverse de la multiplication, la règle de la division est une conséquence de la règle de la multiplication (et du théorème fondamental).

Règle. — *Le quotient de deux nombres décomposés en facteurs premiers se déduit du dividende en diminuant chaque exposant d'un nombre égal à l'exposant du même facteur dans le diviseur; si la différence est zéro, le facteur ne figure pas dans le quotient; si la soustraction est impossible ou si le diviseur renferme des facteurs premiers qui ne figurent pas dans le dividende, la division est impossible.*

Soit, par exemple, à diviser le nombre

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

par le nombre

$$24 = 2^3 \times 3.$$

Le quotient doit être tel que son produit par 24 reproduise 360; si donc on le suppose décomposé en facteurs premiers et qu'on le multiplie par 24 d'après la règle de la multiplication, *on devra trouver le produit de facteurs premiers qui est égal à 360, puisque 360 ne peut être décomposé que d'une seule manière en facteurs premiers.* Donc l'exposant de chaque facteur premier dans le dividende 360 est égal à la somme des exposants de ce facteur

dans le diviseur 24 et dans le quotient inconnu. D'après la définition même de la soustraction on est conduit à la règle énoncée; on trouve :

$$3 \times 5 = 15.$$

Si l'on avait proposé de diviser $3^3 \times 7^2$ par 2×3, la réponse aurait été que le premier de ces nombres n'est pas divisible par le second; car s'il l'était et que l'on décomposât le quotient en facteurs premiers, le facteur 2 devrait figurer dans le dividende avec un exposant égal à la somme de ses exposants dans le diviseur et le quotient, et par conséquent au moins égal à 1, ce qui n'a pas lieu. De même, si l'on avait proposé de diviser $2^3 \times 3^2 \times 5$ par 2×3^3, car il n'y a pas de nombre qui ajouté à 3, exposant de 3 dans le diviseur, donne 2, exposant de 3 dans le dividende. On peut donc énoncer le théorème très important suivant :

Théorème. — *Pour qu'un nombre décomposé en facteurs premiers soit divisible par un autre, il faut et il suffit que le dividende renferme tous les facteurs premiers qui figurent dans le diviseur, chacun d'eux ayant un exposant au moins égal à celui qu'il a dans le diviseur.*

Remarque. — La règle de la division s'énonce sous une forme plus simple et plus claire si l'on observe qu'un facteur qui ne figure pas dans un produit peut être considéré comme figurant avec l'exposant *zéro;* on peut donc toujours supposer que le diviseur renferme *les mêmes* facteurs premiers que le dividende, certains d'entre eux pouvant avoir l'exposant zéro (il ne peut pas renfermer des facteurs qui ne sont pas dans le dividende) *Le*

quotient est alors égal au produit des mêmes facteurs premiers, chacun d'eux ayant un exposant égal à la différence de ses exposants dans le dividende et le diviseur; si cette règle conduit à donner à certains facteurs l'exposant zéro, on peut supprimer ces facteurs dans le produit, ce qui revient à les remplacer par 1, car le produit d'un nombre par 1 est ce nombre lui-même; ainsi, *tout facteur affecté de l'exposant zéro sera remplacé par 1.*

Si, par exemple, on considère les nombres

$$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5 \qquad 15 = 3 \times 5$$

on écrira $15 = 2^0 \times 3 \times 5$ et l'on aura :

$$720 : 15 = 2^{4-0} \times 3^{2-1} \times 5^{1-1} = 2^4 \times 3 \times 5^0 = 2^4 \times 3.$$

50. **P. g. c. d. et p. p. c. m. de nombres décomposés en facteurs premiers.** — La règle de divisibilité donne immédiatement des règles qui permettent d'écrire le p. g. c. d. et le p. p. c. m. de nombres décomposés en facteurs premiers; il suffit de remarquer que la valeur d'un produit de facteurs augmente lorsqu'on y introduit des facteurs nouveaux, ou lorsqu'on augmente les exposants des facteurs qui y figurent. On obtiendra donc le p. g. c. d. de plusieurs nombres en prenant, parmi les nombres qui les divisent, celui qui renferme le plus de facteurs premiers et qui renferme chacun d'eux avec le plus fort exposant. De même on obtiendra le p. p. c. m. en prenant, parmi les multiples des nombres donnés, celui qui renferme le moins de facteurs premiers et chacun d'eux avec le plus faible exposant. On obtient ainsi les règles suivantes :

Règle. — *Le p. g. c. d. de nombres décomposés en facteurs premiers s'obtient en prenant les facteurs premiers communs à tous ces nombres et affectant chacun d'eux du plus petit des exposants qu'il a dans ces nombres.* Car, si l'on introduisait un facteur premier qui ne figure pas dans l'un des nombres donnés, ou si l'on donnait à un facteur un exposant supérieur à celui qu'il a dans l'un des nombres donnés, le produit formé ne diviserait pas ce nombre; on a donc bien le p. g. c. d. puisque l'on ne peut former de diviseur commun plus grand.

Exemple. Soient les nombres

$$240 = 2^4 \times 3 \times 5 \quad 36 = 2^2 \times 3^2 \quad 1\,000 = 2^3 \times 5^3.$$

Le p. g. c. d. est $2^2 = 4$.

Un raisonnement analogue justifierait la règle pour le p. p. c. m.

Règle. — *Le p. p. c. m. de plusieurs nombres décomposés en facteurs premiers est égal au produit de tous les facteurs premiers qui figurent dans ces nombres (communs ou non) chacun d'eux étant affecté d'un exposant égal au plus fort des exposants qu'il a dans ces nombres.*

Exemple. Si l'on reprend les nombres 240, 36 et 1 000, on trouve que leur p. p. c. m. est

$$2^4 \times 3^2 \times 5^3 = 18\,000.$$

EXERCICES SUR LE CHAPITRE VI

63. — Reconnaître si les nombres suivants sont premiers :

191, 1 203, 1 307, 1 501, 2 309, 15 247, 17 231.

64. — Décomposer en facteurs premiers les nombres

342, 575, 684, 1 002.

65. — Calculer le p. g. c. d. des nombres précédents.

66. — Calculer le p. p. c. m. des nombres

11, 101, 1 001.

67. — Calculer le p. p. c. m. des nombres

9, 99, 999, 9 999.

68. — Montrer, à l'aide de la décomposition en facteurs premiers que le produit du p. p. c. m. de deux nombres par leur p. g. c. d. est égal au produit de ces nombres.

69. — Combien de fois le facteur premier 3 entre-t-il dans le produit des 50 premiers nombres ?

70. — Combien de fois le facteur premier 7 entre-t-il dans le produit des 1 000 premiers nombres ?

71. — Combien de fois le facteur premier 13 figure-t-il dans le produit des 3 654 premiers nombres.

72. — Décomposer en facteurs premiers le produit des 121 premiers nombres.

CHAPITRE VII

FRACTIONS ORDINAIRES

I. DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES

51. **Notion de la fraction.** — La notion de fraction a été suggérée par l'étude de problèmes tels que le suivant : *on désire partager également 3 pommes entre 4 enfants; combien chacun aura-t-il de pommes?* Si l'on avait 8 pommes à partager entre 4 enfants, chacun d'eux aurait un certain nombre de pommes, et l'on obtiendrait ce nombre en divisant 8 par 4, ce qui donne 2. Mais si l'on n'a que 3 pommes, il est clair qu'il n'y en a pas une pour chaque enfant; on pourra diviser chaque pomme en quatre parties égales, en quatre *quarts*, et donner à chaque enfant un quart de chacune des pommes, de sorte que chacun d'eux aura trois quarts de pomme. La réponse n'est donc plus fournie par un nombre entier, mais par une *fraction*. Il est naturel d'étendre le sens du mot *division*, et d'appeler *division* l'opération par laquelle on *divise* 3 pommes en 4 parts égales, de même que l'on appelle *division* l'opération par

laquelle on divise 8 pommes en 4 parts égales; dans ce dernier cas, le quotient est 2, dans l'autre il est *trois quarts*. De même, on étend le sens du mot nombre, réservé jusqu'ici aux nombres entiers, et l'on dira que les fractions sont des nombres. Nous allons définir d'une manière précise ces nouveaux nombres et établir les règles de leur calcul, sans jamais perdre de vue leur origine concrète.

52 **Définition des fractions.** — Pour définir les fractions, il est nécessaire de remarquer qu'il existe des objets et des grandeurs susceptibles d'être divisés, au moins par la pensée, en un nombre quelconque de parties *égales*. Par exemple, voici un ruban dont la longueur est 1 mètre, nous concevons qu'il est possible de le partager en 6 parties égales, ou en 13 parties égales, ou en 250 parties égales, si l'on nous demandait de le diviser en un million de parties égales, il est clair que la division ne serait pas pratiquement réalisable, mais il est cependant possible de la concevoir. De même si l'on a une bouteille contenant un litre d'eau et un certain nombre de verres identiques, on conçoit qu'il soit possible de vider la bouteille dans les verres de manière qu'ils contiennent tous la même quantité d'eau; on a ainsi partagé le litre d'eau en un certain nombre de parties égales[1].

---

1. Si l'on voulait être précis, il y aurait lieu de distinguer entre l'eau qui remplit la bouteille, considérée comme objet concret, et le *litre* qui est la mesure de l'eau. Si l'on a vidé la bouteille également dans 4 verres, chaque verre contient *un quart* de la quantité d'eau donnée, indépendamment de la *mesure* de cette eau.

Mais on peut faire abstraction de l'eau et remarquer que la contenance de chaque verre est un quart de *litre*, indépendamment de la nature du liquide avec lequel il serait possible de le

Nous appellerons grandeurs *divisibles* les grandeurs que l'on peut ainsi diviser en un nombre *quelconque* de parties égales; ainsi un régiment de 1 200 hommes n'est pas une grandeur divisible; car on peut évidemment le diviser en 2, en 3, mais non pas en 10 ou en 10 000 parties égales; on peut parler de sa moitié et de son tiers, mais non de son dix-septième ou de son dix-millième. *Nous supposerons essentiellement que l'on ne considère que des grandeurs divisibles;* on peut alors donner les définitions suivantes :

Définitions. — *On donne le nom de fraction à la notation par laquelle on exprime que l'on divise une grandeur en un certain nombre de parties égales et que l'on prend un certain nombre de ces parties.*

Le nombre des parties égales en lesquelles on a divisé la grandeur s'appelle le dénominateur de la fraction; le nombre de parties que l'on prend s'appelle le numérateur.

Pour écrire une fraction, on écrit son dénominateur au-dessous de son numérateur en les séparant par un trait horizontal; pour énoncer une fraction, on énonce d'abord le numérateur et ensuite un adjectif dérivé du dénominateur (demi, tiers, quart, cinquième, sixième, cent millième, millionième, etc.)[1].

---

remplir. Dans le premier cas, on fractionne un objet, dans le second, on fractionne la mesure d'une grandeur. Les commençants ne doivent pas s'embarrasser de cette distinction un peu subtile; nous avons tenu cependant à la signaler.

1. Il n'est pas inutile d'observer que cette manière d'énoncer les fractions prête quelquefois à ambiguïté; la fraction $\frac{200}{1\,000}$ s'énonce : deux cents *millièmes* et la fraction $\frac{2}{100\,000}$, qui en est

La grandeur que l'on partage en parties égales doit être regardée comme égale à l'*unité*, de même que l'on regarde comme égaux à l'*unité* les objets dont la réunion permet de définir les nombres entiers. De même que l'on peut regarder un nombre entier comme une collection d'unités, en faisant abstraction de la nature de l'unité, *on peut regarder une fraction comme la collection de parties de l'unité, supposée divisée en parties égales*. Seulement il faut observer que, si toutes les unités peuvent être collectionnées, toutes ne peuvent pas être divisées ; la division de l'unité en parties égales n'a de sens que si cette unité correspond à une grandeur *divisible*. Si l'on fait cette hypothèse, il est parfaitement légitime de substituer le langage abstrait au langage concret dont nous avons fait usage.

53. — Il résulte de la définition qu'une fraction est d'autant plus grande que son numérateur est plus grand et que son dénominateur est plus petit. D'une manière plus précise, si deux fractions ont même dénominateur, la plus grande est celle qui a le plus grand numérateur ; ainsi $\frac{7}{12}$ est plus grand que $\frac{5}{12}$, car ces fractions expriment toutes deux des douzièmes, c'est-à-dire des parties égales de l'unité ; mais la première en exprime 7 tandis que la seconde en exprime seulement 5. De même, si deux fractions ont même numérateur, la plus grande est celle qui a le plus petit dénominateur ; ainsi $\frac{5}{11}$ est plus grand que $\frac{5}{12}$ car *un onzième* est plus grand

---

très différente, s'énonce : deux *cent-millièmes*, c'est-à-dire au moyen des mêmes mots placés dans le même ordre. Pour éviter cette ambiguïté, on dira : 200 *sur* 1 000 ; 2 *sur* 100 000.

que *un douzième*, puisque pour obtenir un onzième il faut diviser l'unité en moins de parties égales que pour obtenir un douzième; si nous sommes 11 à nous partager 5 pommes, la part de chacun sera plus grande que si nous sommes 12. Des remarques concrètes analogues aux précédentes permettent de démontrer immédiatement les principes suivants, qui sont fondamentaux :

Principe I. — *Si l'on multiplie le numérateur d'une fraction par un nombre, on rend cette fraction ce nombre de fois plus grande.*

Principe II. — *Si l'on multiplie le dénominateur d'une fraction par un nombre on rend cette fraction ce nombre de fois plus petite.*

Ainsi $\frac{9}{13}$ est 3 fois plus grand que $\frac{3}{13}$; $\frac{5}{12}$ est 2 fois plus petit que $\frac{5}{6}$.

54. **Quotient exact de deux nombres entiers.** — L'une des applications les plus importantes des fractions consiste en ce qu'elles donnent le moyen d'exprimer le quotient exact de deux nombres entiers, *en partant de la définition concrète de la division*. Cette définition est la suivante : *diviser un nombre par un autre, c'est partager la grandeur représentée par le dividende en un nombre de parties égales représenté par le diviseur*. Par exemple diviser 14 par 3 ce sera rechercher le nombre qui fournit la réponse à la question suivante : *on veut partager 14 pommes également entre 3 enfants, combien doit-on en donner à chacun?* On peut remarquer que si l'on partage chaque pomme en 3 parties égales et que l'on donne à chacun des enfants un

tiers de chacune des pommes, chacun d'eux aura 14 tiers de pomme; d'où le théorème suivant :

Théorème I. — *Le quotient de deux nombres entiers est égal à une fraction ayant pour numérateur le dividende et pour dénominateur le diviseur.*

Dans le cas où le dividende est divisible par le diviseur, il est clair que la définition *concrète* de la division que nous venons de donner est équivalente à la définition comme opération inverse de la multiplication; d'où le nouveau théorème :

Théorème II. — *Dans le cas où le numérateur d'une fraction est divisible par le dénominateur, la fraction est égale au quotient.*

En effet, si l'on veut partager 12 pommes entre 3 enfants, on peut, ou bien donner à chacun d'eux 4 pommes entières, ou bien, partager chaque pomme en tiers et donner à chaque enfant 1 tiers de chaque pomme, c'est-à-dire 12 tiers de pomme; il est clair que, si les pommes sont égales, comme on doit le supposer, ces deux méthodes conduisent nécessairement au même résultat.

Supposons maintenant que l'on veuille partager 11 pommes entre 4 enfants; comment procédera-t-on pratiquement? On commencera par donner à chacun d'eux le plus possible de pommes entières; on pourra leur en donner 2, *quotient par défaut de 11 par 4*, et il en *restera* 3, que l'on partagera en quarts, dont chacun aura 3, de sorte que chaque enfant aura 2 pommes 3 quarts, ce que l'on peut écrire aussi $2\frac{3}{4}$ *pommes;* le *nombre* de pommes est $2\frac{3}{4}$; c'est ce que l'on appelle parfois un *nombre*

fractionnaire. On est ainsi conduit à la règle suivante :

Règle. — *Le quotient exact s'obtient en ajoutant au quotient par défaut une fraction ayant pour numérateur le reste et pour dénominateur le diviseur.*

L'écriture $2\frac{3}{4}$ est employée pour $2 + \frac{3}{4}$; le signe + est supprimé ; il est important de signaler cette exception consacrée par l'usage au fait que le signe d'opération que l'on supprime est toujours celui de la multiplication ; aussi ne doit-on employer cette notation que lorsqu'on est certain qu'elle ne peut prêter à aucune ambiguïté.

Au sujet de la locution *nombre fractionnaire*, voir ce que nous disons plus loin au sujet des mots : fraction décimale et nombre décimal (p. 130).

Lorsque l'on a une fraction dont le numérateur est plus grand que le dénominateur, on peut en effectuant la division du numérateur par le dénominateur, *extraire les entiers*, c'est-à-dire remplacer la fraction par un nombre entier, augmenté d'une nouvelle fraction dans laquelle le numérateur est inférieur au dénominateur. Cette nouvelle fraction est inférieure à l'unité, c'est-à-dire exprime une grandeur plus petite que la grandeur prise pour unité.

Inversement, la somme d'un nombre entier et d'une fraction peut être mise sous forme purement fractionnaire, si l'on a 2 pommes et 3 quarts de pomme, on peut observer que 2 pommes équivalent à 8 quarts de pomme, de sorte que l'on a 8 quarts de pomme et 3 quarts de pomme, c'est-à-dire 11 quarts de pomme.

55. **Simplification des fractions.** — Deux fractions sont dites égales lorsque, *la même grandeur divisible étant prise comme unité*, elles représentent des grandeurs égales. Ainsi, $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, car les 2 quarts d'une pomme sont la même chose que la moitié de cette pomme ; de même $\frac{3}{10} = \frac{30}{100}$, car les 3 dixièmes d'un mètre de ruban sont la même chose que les 30 centièmes de ce mètre de ruban.

Simplifier une fraction, c'est la remplacer par une fraction qui lui soit égale et dont les termes soient plus simples, c'est-à-dire soient des nombres plus petits. La simplification des fractions repose sur le théorème suivant :

Théorème III. — *Étant données deux fractions, si le numérateur et le dénominateur de l'une d'elles sont respectivement égaux aux produits par un même nombre du numérateur et du dénominateur de l'autre, ces deux fractions sont égales.*

On exprime quelquefois la relation qui existe entre les deux fractions de l'énoncé, en disant que les deux termes de l'une sont *équimultiples* des termes de l'autre.

Ainsi 12 et 18 sont *équimultiples* de 2 et 3, car $12 = 2 \times 6$ et $18 = 3 \times 6$. Nous voulons prouver que les fractions $\frac{12}{18}$ et $\frac{2}{3}$ sont égales. Pour le voir il suffit d'observer que pour diviser une grandeur en 18 parties égales, on peut la diviser d'abord en 3 parties égales, et ensuite diviser chacune de ces parties en 6 parties égales ; on obtiendra bien ainsi $3 \times 6 = 18$ parties toutes égales entre elles ; chaque

tiers équivaut donc à 6 dix-huitièmes ; donc 2 tiers équivalent à 2×6 ou 12 dix-huitièmes, ce qu'il fallait démontrer.

On peut aussi déduire le théorème III des principes I et II du n° 53.

On peut donner à l'énoncé du théorème précédent deux formes différentes, qu'il est utile de connaître, bien qu'elles n'expriment rien de nouveau.

Théorème III *bis*. — *On ne change pas la valeur d'une fraction lorsqu'on multiplie ses deux termes par un même nombre.*

Théorème III *ter*. — *On ne change pas la valeur d'une fraction lorsqu'on divise par un même nombre ses deux termes, supposés divisibles par ce nombre.*

C'est ce dernier énoncé qui est utilisé dans la simplification des fractions ; on simplifiera une fraction en divisant ses deux termes par un de leurs diviseurs communs ; ainsi l'on a :

$$\frac{24}{38} = \frac{12}{19}; \qquad \frac{250}{450} = \frac{25}{45}.$$

Si l'on veut simplifier le plus possible une fraction, on divise ses deux termes par leur p. g. c. d. ; on obtient ainsi une nouvelle fraction égale à la première et dont les deux termes sont premiers entre eux, c'est-à-dire irréductible, d'après la définition suivante :

Définition. — *On dit qu'une fraction est irréductible lorsque ses deux termes sont premiers entre eux.*

Les deux termes d'une fraction irréductible étant premiers entre eux, il n'est pas possible de la sim-

plifier en divisant ses deux termes par un diviseur commun; nous admettrons, sans le démontrer, qu'*il n'existe pas d'autre moyen de la simplifier*, c'est-à-dire qu'une fraction irréductible est *réduite à sa plus simple expression;* il n'existe pas de fraction qui lui soit égale et qui ait des termes plus petits que le sien.

Il en résulte que deux fractions irréductibles ne peuvent être égales que si elles sont *identiques*, c'est-à-dire si leurs numérateurs sont égaux, ainsi que leurs dénominateurs ; sinon l'une d'elles aurait ses termes plus petits que ceux de l'autre, ce qui est contraire au fait que nous venons d'énoncer[1].

Une fraction quelconque *est égale à une fraction irréductible et à une seule;* car si elle était égale à deux fractions irréductibles, ces deux fractions irréductibles seraient égales entre elles, ce qui n'est pas possible.

On obtient *la* fraction irréductible égale à une fraction donnée en divisant ses deux termes par leur p. g. c. d , il en résulte que les termes de toute fraction sont des équimultiples des termes de la fraction irréductible équivalente.

Ainsi, à chaque fraction correspond une *fraction irréductible*, qui est la *forme la plus réduite* que l'on puisse lui donner : pour que deux fractions soient égales, il est nécessaire et suffisant que leurs formes réduites soient identiques.

---

1. Il n'est évidemment pas possible que deux fractions soient égales, le numérateur de la première étant plus grand que celui de la seconde et le dénominateur de la première plus petit que celui de la seconde, c'est une conséquence des remarques du n° 53.

56. **Réduction au même dénominateur.** DÉFINITION. — *Réduire plusieurs fractions données au même dénominateur, c'est remplacer chacune d'elles par une fraction qui lui soit égale, ces nouvelles fractions ayant toutes le même dénominateur.*

Pour réduire plusieurs fractions au même dénominateur, on commence par choisir le *dénominateur commun*, c'est-à-dire le dénominateur des nouvelles fractions; ce dénominateur doit être choisi de telle manière qu'il existe, pour chacune des fractions données, une fraction ayant ce dénominateur et qui lui soit égale Nous supposerons que les fractions données sont irréductibles; si elles ne l'étaient pas, nous remplacerions chacune d'elles par la fraction irréductible qui lui est égale. Le dénominateur commun doit être un multiple des dénominateurs de ces diverses fractions irréductibles; on aura donc le dénominateur commun le plus petit possible en le prenant égal au p. p. c. m. des fractions irréductibles. On déduit de là la règle suivante :

RÈGLE. — *Pour réduire plusieurs fractions au même dénominateur, on commence par remplacer chacune d'elles par la fraction irréductible égale; on forme ensuite le p. p. c. m. des dénominateurs de ces fractions irréductibles; ce sera le dénominateur commun. Enfin, on multiplie les deux termes de chaque fraction par le quotient de ce dénominateur commun par le dénominateur de la fraction.*

Soient, par exemple, les fractions :

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{5}{6}.$$

Elles sont irréductibles; le p. p. c. m. des déno-

minateurs est 12; les quotients de 12 par les dénominateurs des fractions sont :

$$6, \quad 3, \quad 2;$$

il suffit de multiplier les deux termes de chaque fraction par le quotient correspondant pour avoir les fractions cherchées :

$$\frac{6}{12}, \quad \frac{9}{12}, \quad \frac{10}{12}.$$

Remarque I. — Si l'on n'avait pas eu soin de rendre les fractions irréductibles, ou si l'on prenait un multiple commun quelconque des dénominateurs au lieu du p. p. c. m., on arriverait aussi à les réduire au même dénominateur, mais les calculs seraient généralement plus longs, parce qu'ils porteraient sur des nombres plus grands, et, de plus, conduiraient à des résultats plus compliqués, c'est-à-dire à des fractions dont les termes seraient plus élevés.

Remarque II. — La décomposition en facteurs premiers est souvent très utile pour la formation du p. p. c. m. et le calcul des quotients de ce p. p. c. m. par les divers dénominateurs; nous en donnerons un exemple tout à l'heure, à propos de l'addition des fractions.

II. OPÉRATIONS SUR LES FRACTIONS

57. **Addition.** — La définition de la *somme* est la même pour les fractions que pour les nombres entiers; faire la somme de plusieurs fractions, c'est déterminer la fraction qui correspond à la réunion des grandeurs représentées par les fractions don-

nées (l'unité choisie étant supposée bien déterminée). Ainsi, voici 2 tiers de pomme et voilà 1 quart de pomme; si nous les réunissons, nous obtenons une certaine fraction de pomme, que l'on propose de calculer [1]. Pour additionner des fractions on applique les règles suivantes :

Règle I. — *Lorsque plusieurs fractions ont même dénominateur, leur somme est une fraction ayant même dénominateur que chacune d'elles et ayant pour numérateur la somme de leurs numérateurs.*

Règle II. — *Pour additionner des fractions quelconques, on commence par les réduire au même dénominateur et l'on applique ensuite la règle précédente.*

La règle I se justifie par la définition même de l'addition; si l'on réunit 5 douzièmes, 6 douzièmes et 3 douzièmes d'une même grandeur, on obtient évidemment 14 douzièmes de cette grandeur, puisque tous les douzièmes sont égaux entre eux; quant à la règle II, il suffit d'observer que, d'après la définition de l'addition, la somme de plusieurs fractions ne change pas lorsqu'on remplace chacune d'elles par une fraction qui lui est égale.

Exemple I. — *Soit à additionner les fractions* $\frac{2}{15}$ et $\frac{7}{10}$. Le p. p. c. m. de 15 et de 10 est 30, dont les quotients par 15 et 10 sont 2 et 3; les deux fractions proposées équivalent donc à $\frac{4}{30}$ et $\frac{21}{30}$, dont la

---

1. Il n'est pas absolument évident, *a priori*, que la somme de deux fractions, ainsi définie, doit être une fraction; une observation analogue s'applique à la soustraction, à la multiplication et à la division; mais cela résulte des règles démontrées pour les opérations.

somme est $\frac{25}{30}$ ou, en simplifiant, $\frac{5}{6}$; on peut résumer cela en écrivant :

$$\frac{2}{15}+\frac{7}{10}=\frac{4}{30}+\frac{21}{30}=\frac{25}{30}=\frac{5}{6}.$$

Nous avons réduit la somme trouvée à sa plus simple expression.

Exemple II. — *Effectuer la somme :*

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{18}+\frac{10}{9}+\frac{7}{12}.$$

Pour trouver le p. p. c. m. des dénominateurs décomposons-les en facteurs premiers ; nous avons :

$$\begin{array}{ll} 4=2^2 & 36:\ 4=3^2=9 \\ 18=2\times 3^2 & 36:18= \quad 2 \\ 9=3^2 & 36:\ 9=2^2=4 \\ 12=2^2\times 3 & 36:12= \quad 3 \end{array}$$

$$\text{p. p. c. m.}=2^2\times 3^2=36.$$

On peut écrire les quotients du p. p. c. m par les divers dénominateurs en utilisant le fait qu'ils se trouvent décomposés en facteurs premiers ; ici, l'avantage n'est pas bien grand ; mais, dans certains cas, il est beaucoup plus court de procéder ainsi.

Nous sommes ainsi amenés à effectuer la somme :

$$\frac{9}{36}+\frac{2}{36}+\frac{40}{36}+\frac{21}{36}=\frac{72}{36}=2.$$

Il se trouve que 72 est divisible exactement par 36. La somme des fractions proposées est donc le nombre entier 2.

Si l'on a à ajouter à la fois des nombres entiers

et des fractions, on peut, ou bien ajouter les entiers entre eux et les fractions entre elles, puis réunir les deux sommes, ou bien remplacer les nombres entiers par des fractions ayant comme dénominateur le dénominateur commun. Ce dernier procédé n'est avantageux que si ces entiers sont à la fois peu nombreux et très petits.

EXEMPLE III. — *Effectuer l'addition suivante :*

$$45 + \frac{3}{4} + 17 + 50 + \frac{5}{6}.$$

On a :

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{19}{12} = 1 + \frac{7}{12}$$
$$45 + 17 + 50 + 1 = 133.$$

La somme cherchée est $133 + \frac{7}{12}$ $\left(\text{ou } 133\,\frac{7}{12}\right)$.

EXEMPLE II. — *Effectuer l'addition :*

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{6} + 1 + \frac{3}{4}.$$

Cette somme est égale à :

$$\frac{8}{12} + \frac{10}{12} + \frac{12}{12} + \frac{9}{12} = \frac{39}{12} = \frac{13}{4}.$$

58. **Soustraction**. — La règle de la soustraction est analogue à celle de l'addition et se justifie de la même manière.

RÈGLE. — *La différence de deux fractions de même dénominateur est une fraction ayant même dénominateur que chacune d'elles et ayant pour numérateur la différence de leurs numérateurs.*

Si l'on désire soustraire l'une de l'autre deux fractions quelconques, on commence par les réduire au même dénominateur et l'on applique ensuite la règle précédente.

La soustraction n'est pas toujours possible; on ne peut retrancher d'une fraction que les fractions plus petites qu'elle; lorsque deux fractions n'ont pas même dénominateur, leur grandeur relative n'apparaît pas toujours immédiatement; il est généralement nécessaire de les réduire au même dénominateur pour savoir quelle est la plus grande.

59. **Multiplication**. — La multiplication des fractions doit être définie de manière qu'elle fournisse la solution des mêmes problèmes concrets que la multiplication des nombres entiers. Si l'on pose le problème suivant : *1 mètre de drap coûte 3 francs, combien coûtent 4 mètres du même drap?* on sait que la réponse est 3×4 francs. De même le produit de $\frac{3}{4}$ par $\frac{5}{6}$ doit être défini de manière à fournir la solution du problème suivant : *On sait que 1 mètre de toile coûte $\frac{3}{4}$ de franc, combien coûtent $\frac{5}{6}$ de mètres de la même toile?* Or la solution de cette question s'obtient par le raisonnement suivant dans lequel on utilise les remarques du n° 53 :

Si un mètre de toile coûte $\frac{3}{4}$ de franc, $\frac{1}{6}$ de mètre coûte 6 fois moins; il faut donc partager $\frac{3}{4}$ de franc en 6 parties égales, ce qui revient à partager chaque quart en 6 parties; on obtient ainsi $\frac{3}{4 \times 6}$ ou 3 vingt-

quatrièmes de franc; $\frac{1}{6}$ de mètre coûtant 3 vingt-quatrièmes de franc, $\frac{5}{6}$ de mètre coûtent 5 fois plus, c'est-à-dire 15 vingt-quatrièmes; tel est le résultat cherché; on aura donc :

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{6} = \frac{3 \times 5}{4 \times 6} = \frac{15}{24};$$

d'où la règle :

Règle. — *Le produit de deux fractions est une nouvelle fraction ayant pour numérateur le produit des deux numérateurs et pour dénominateur le produit des deux dénominateurs.*

Plus brièvement : *pour multiplier 2 fractions, il suffit de les multiplier terme à terme.*

Cette règle s'applique au produit de plusieurs fractions; si parmi elles se trouvent des nombres entiers, il suffit de les regarder comme des fractions dont le dénominateur est égal à *un*.

Les propriétés de la multiplication, par rapport à l'addition et la soustraction, subsistent évidemment pour les mêmes raisons concrètes que dans le cas des nombres entiers; il serait aisé de les démontrer en les ramenant aux théorèmes démontrés pour le cas des entiers; mais ce serait fastidieux et peu intéressant.

Contentons-nous de les énoncer :

Théorème. — *Pour multiplier une somme ou une différence par une fraction, il suffit de multiplier par cette fraction les diverses parties de la somme ou de la différence et d'ajouter ou retrancher, suivant le cas, les produits obtenus.*

De même, on voit immédiatement que la valeur d'un produit de plusieurs facteurs ne dépend pas de l'ordre des facteurs, car si l'on permute les facteurs, cela revient à permuter les facteurs entiers dans le numérateur du produit, ce qui ne change pas leur valeur.

$$\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{2}{3}=\frac{3\times5\times2}{4\times6\times3}$$

$$\frac{2}{3}\times\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}=\frac{2\times5\times3}{3\times6\times4}.$$

Remarque. — Quand on a effectué le produit de plusieurs fractions, il est souvent avantageux de simplifier ce produit avant d'effectuer les multiplications on utilise pour cela les remarques du n° 33; par exemple, dans le produit précédent, on peut diviser le numérateur et le dénominateur par $2\times3=6$ et il reste $\frac{5}{12}$.

60. **Division**. — La division des fractions sera définie comme l'opération inverse de la multiplication, le quotient est une fraction dont le produit par la fraction diviseur soit égal à la fraction dividende; la règle est la suivante :

Règle. — *Pour diviser deux fractions, on multiplie la fraction dividende par la fraction diviseur renversée.*

Justification de la règle. — Soit à diviser $\frac{3}{4}$ par $\frac{5}{7}$; d'après la définition, il s'agit de trouver une fraction qui, multipliée par $\frac{5}{7}$, donne pour produit $\frac{3}{4}$; je

dis que c'est la fraction :

$$\frac{3}{4}\times\frac{7}{5}=\frac{3\times 7}{4\times 5}.$$

En effet, si l'on multiplie cette fraction par $\frac{5}{7}$, on obtient :

$$\frac{3\times 7}{4\times 5}\times\frac{5}{7}=\frac{3\times 7\times 5}{4\times 5\times 7}=\frac{3}{4},$$

car on peut simplifier en supprimant le facteur $7\times 5=5\times 7$.

Il importe de remarquer que, d'après sa définition même, la division des fractions fournit la solution des mêmes problèmes concrets que la division *exacte* des nombres entiers : 3 000 *mètres carrés de terrain coûtent 36 000*^{fr} ; *combien coûte le mètre ?* La réponse est 36 000 : 3 000 = 12^{fr}. De même : *Les* $\frac{3}{4}$ *d'un hectare de terrain coûtent les* $\frac{2}{5}$ *d'un million de francs ; combien coûte l'hectare de ce terrain ?* La réponse est $\frac{2}{5}:\frac{3}{4}=\frac{8}{15}$ d'un million. En effet, d'après la définition de la multiplication le prix des $\frac{3}{4}$ d'un hectare est égal au produit par $\frac{3}{4}$ du prix d'un hectare. La définition concrète de la division conduit donc au même résultat que la définition comme opération inverse de la multiplication. Cette remarque n'est pas inutile car on ne saurait trop se prémunir contre la tendance assez naturelle de l'esprit à regarder *sans réfléchir*, comme identiques deux notions ou

deux objets, *par le fait seul* que les mots qui les désignent sont identiques.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE VII

73. — Additionner les fractions suivantes :

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}$$

$$\frac{3}{5}+\frac{2}{3}+\frac{8}{12}$$

$$\frac{15}{20}+\frac{150}{1\,000}+\frac{30}{99}.$$

74. — Effectuer les soustractions suivantes :

$$3-\frac{5}{6}$$

$$\frac{4}{3}-\frac{8}{12}$$

$$\frac{5}{4}-\frac{150}{300}$$

$$\frac{12}{5}-\frac{9}{15}.$$

75. — Effectuer les multiplications suivantes :

$$\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{6}{7}\times\frac{4}{5}$$

$$\frac{9}{12}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{15}{12}.$$

76. — Effectuer les multiplications suivantes :

$$2\frac{3}{4}\times 5\frac{7}{8}\times 3\frac{8}{3}$$

$$6\frac{2}{3}\times 2\frac{3}{4}\times 3\frac{1}{2}.$$

77. — Effectuer les divisions suivantes :

$$\frac{12}{15}:\frac{2}{3}$$

$$\frac{15}{18}:\frac{3}{4}.$$

78. — Effecter les divisions suivantes :

$$2\frac{3}{4} : 5\frac{2}{3}$$

$$5\frac{1}{2} : 3\frac{1}{4}.$$

79. — Un entrepreneur dispose d'une certaine somme pour bâtir une maison, il constate qu'il a dépensé les $\frac{3}{4}$ de la somme et bâti les $\frac{2}{3}$ de la maison ; quelle fraction de la maison pourra-t-il bâtir avec la somme entière ?

80. — On a constaté que les $\frac{2}{3}$ d'un hectare de terrain, dans une certaine région, coûtent le même prix que les $\frac{4}{7}$ d'un mètre carré, dans un quartier central de Paris. Combien pourrait-on acheter d'hectares de terrain avec le prix de vente de $56^{m}\frac{2}{3}$?

81. — Une fontaine remplirait un bassin en 8^{h}, une autre en 6^{h} et une troisième en 4^{h}. En combien de temps les trois fontaines coulant ensemble rempliront-elles le bassin ?

82. — Un robinet remplit un bassin en 5^{h} et un second en $6^{h}\frac{3}{4}$; un troisième le vide en $4^{h}\frac{5}{6}$; si l'on ouvre les trois robinets, en combien de temps le bassin se remplira-t-il ?

83. — Un maître promet à son domestique 1 300^{fr} par an, plus un habit ; au bout de 7 mois, il le renvoie en lui donnant 700^{fr} et l'habit ; à quelle valeur évalue-t-il l'habit ?

84. — Les roues de devant d'une voiture ont $2^{m}\frac{3}{4}$ de tour et les roues de derrière ont $3^{m}\frac{5}{6}$; quelle est la plus petite distance que doive parcourir la voiture pour que toutes les roues aient fait un nombre exact de tours ? Quel est le nombre de ces tours ?

85. — Un ouvrier ferait un ouvrage en 8^{h} et un autre le ferait en 12^{h} ; combien de temps mettront les deux ouvriers travaillant ensemble ? On suppose que leur collaboration ne gêne ni ne simplifie leur travail.

86. — Pour faire un ouvrage il faut à un premier ouvrier

$3^j \frac{3}{4}$ de 10^h; à un second $3^j \frac{1}{2}$ de 12^h; à un troisième 4^j de 9^h; à un quatrième $3^j \frac{5}{8}$ de 8^h; combien d'heures faudra-t-il à ces quatre ouvriers travaillant ensemble pour achever l'ouvrage.

87. — Les deux aiguilles d'une pendule sont l'une sur l'autre à midi précis; à quelle heure seront-elles, pour la première fois, dans le prolongement l'une de l'autre.

88 — Une pendule a 3 aiguilles concentriques, marquant les heures, les minutes et les secondes; à midi les trois aiguilles coïncident; à quelle heure l'aiguille des minutes sera-t-elle, pour la première fois, bissectrice de l'angle des aiguilles des heures et des secondes (on supposera, dans cette question et dans la précédente, que les aiguilles se déplacent toutes d'angles égaux dans des temps égaux, alors qu'en réalité elles se déplacent par saccades, à des intervalles généralement égaux à une seconde)

89. — Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux fractions, démontrer que la fraction $\frac{a+c}{b+d}$ est comprise entre les deux fractions données. Cas particulier où $c = d = 1$.

90. — Une femme porte des œufs au marché; elle vend à la première personne qu'elle rencontre la moitié de ce qu'elle a, plus la moitié d'un œuf; à la seconde la moitié de ce qui lui reste, plus la moitié d'un œuf; à la troisième la moitié de ce qui lui reste, plus la moitié d'un œuf, et ainsi de suite. On suppose qu'il ne lui reste plus rien après la 4e vente; combien avait-elle d'œufs?

91. — Combien devrait avoir d'œufs la fermière de l'exercice précédent, pour qu'il ne lui en reste plus après la 7e vente?

92. — Une bouteille contient un litre de vin; une première personne en vide $\frac{1}{10}$ qu'elle remplace par de l'eau; une seconde personne vide encore $\frac{1}{10}$ qu'elle remplace par de l'eau; une troisième personne procède de même, puis une quatrième, etc. On demande combien il reste de vin dans la bouteille après la 6e opération.

93 — Un père laisse $\frac{1}{4}$ de sa fortune à chacun de ses enfants ; trois d'entre eux ont respectivement 3, 4 et 7 enfants, et chacun d'eux partage sa fortune également entre ses enfants ; le quatrième partage sa part également entre ses 14 neveux ; on demande de calculer la part de chacun d'eux, sachant que les frères de la famille de 3 enfants ont 1 200^{fr} de plus que les frères de la famille de 4 enfants.

94. — Un renard qui fait 2 pas $\frac{1}{3}$ par seconde a déjà fait 30 pas $\frac{3}{4}$ quand un chien qui fait 4 pas $\frac{1}{2}$ par seconde est lancé contre lui. Dans combien de temps le rattrapera-t-il, étant donné que 3 pas du chien valent 2 pas du renard ?

CHAPITRE VIII

FRACTIONS DÉCIMALES; QUOTIENTS APPROCHÉS

I. FRACTIONS DÉCIMALES

61. **Définition.** — On donne le nom de *fraction décimale* à une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10; on adopte pour ces fractions une écriture particulière. Cette notation simplifiée est basée sur la remarque suivante. Considérons la fraction :

$$\frac{124\,039}{10\,000}.$$

On sait que l'on a :

$$124\,039 = 100\,000 + 20\,000 + 4\,000 + 30 + 9.$$

On a donc :

$$\frac{124\,039}{10\,000} = \frac{100\,000}{10\,000} + \frac{20\,000}{10\,000} + \frac{4\,000}{10\,000} + \frac{30}{10\,000} + \frac{9}{10\,000}$$

$$= 10 + 2 + \frac{4}{10} + \frac{3}{1\,000} + \frac{9}{10\,000}.$$

Ainsi toute fraction décimale peut être mise sous la forme de la somme d'un nombre entier et de *fractions décimales simples*, ayant pour numérateurs des nombres inférieurs à 10 et pour dénominateurs des puissances de 10 toutes différentes entre elles. Une telle fraction se représente par la notation :

12,4039,

où le nombre 12 écrit à gauche de la virgule est la partie entière; les chiffres suivant la virgule représentent successivement des dixièmes, des centièmes, des millièmes, etc., c'est-à-dire des *unités décimales* de dix en dix fois plus petites; le 0 marque la place des centièmes. On voit que ce *nombre décimal*[1] se déduit de la fraction donnée en séparant à la gauche du numérateur un nombre de chiffres égal au nombre de zéros qui suivent l'unité au dénominateur.

La numération des nombres décimaux peut être regardée comme reposant sur les principes suivants, extension de ceux de la numération écrite.

I. — *Le chiffre placé immédiatement à gauche de la virgule représente des unités simples.*

II. — *Tout chiffre placé à droite d'un autre représente des unités dix fois plus petites que cet autre.*

III. — *S'il n'y a pas d'unités d'un certain ordre, on en marque la place par un zéro, pour que les*

---

1. On réserve quelquefois le nom de *nombres décimaux* aux nombres tels que 12,345 qui sont supérieurs à 1, et de *fractions décimales* aux nombres tels que 0,352 ou 0,034 dont la partie entière est zéro; cette distinction ne paraît pas rendre de grands services, et peut avoir l'inconvénient de laisser croire qu'une *fraction décimale* n'est pas un *nombre*.

autres chiffres conservent leurs positions respectives. En particulier, la place des unités simples doit être marquée par un zéro lorsqu'il n'y a pas d'unités simples.

62. **Addition et soustraction**. — Les règles des opérations sur les nombres décimaux sont tout à fait semblables aux règles des opérations *sur les nombres entiers;* et leur justification pourrait être faite, en se servant des principes de la numération, de la même manière que la justification des règles des opérations sur les nombres entiers. Il est plus court d'utiliser, pour cette justification, les règles démontrées pour les fractions ordinaires.

Règle. — *Pour l'addition et la soustraction des nombres décimaux, on procède comme pour les nombres entiers, en ayant soin cependant : 1° en plaçant les nombres les uns au-dessous des autres, de mettre les virgules dans une même colonne verticale; 2° d'écrire, au moins par la pensée, des zéros en nombre suffisant, après les chiffres décimaux, pour qu'il y ait le même nombre de chiffres décimaux dans tous les nombres; 3° de placer, dans le résultat, une virgule au-dessous de la colonne des virgules.*

Justification de la règle. — Soit à effectuer la somme :

$$3,5 + 12 + 0,003 + 0,3571.$$

Si l'on écrit ces nombres sous forme de fractions ordinaires, on a :

$$\frac{35}{10} + 12 + \frac{3}{1\,000} + \frac{3\,571}{10\,000},$$

ou, en réduisant au même dénominateur :

$$\frac{35\,000}{10\,000} + \frac{120\,000}{10\,000} + \frac{30}{10\,000} + \frac{3\,571}{10\,000}.$$

Or si l'on dispose l'opération comme l'indique la règle, on voit que l'addition est *la même* que l'addition des numérateurs des fractions réduites au même dénominateur :

3,5	3,5000	35 000
12	12,0000	120 000
0,003	0,0030	30
0,3571	0,3571	3 571
15,8601	15,8601	158 601

Pour mettre ce fait en évidence, nous avons disposé à gauche, l'addition comme on le fait habituellement; dans une seconde colonne, nous avons écrit effectivement à la droite des nombres décimaux les zéros que l'on se contente d'écrire par la pensée; enfin dans la troisième colonne nous avons disposé l'addition des nombres entiers *de dix-millièmes* auxquels sont égaux les nombres proposés; les trois colonnes donnent lieu à des opérations identiques; le résultat est donc :

$$\frac{158\,601}{10\,000} = 15,8601.$$

La règle de la soustraction se justifie de la même manière.

63. **Multiplication.** Règle. — *Pour multiplier deux nombres décimaux, on procède d'abord comme s'ils étaient entiers, sans tenir compte des virgules,*

et l'on sépare ensuite à la droite du produit un nombre de chiffres décimaux égal à la somme des nombres de chiffres décimaux des deux facteurs.

Soit à multiplier :

$$1,12 \times 0,025.$$

En écrivant ces nombres sous forme de fractions ordinaires on a :

$$1,12 \times 0,025 = \frac{112}{100} \times \frac{25}{1\,000} = \frac{112 \times 25}{100\,000} = \frac{2\,800}{100\,000}$$
$$= 0,02800 = 0,028.$$

On dispose l'opération ainsi :

$$\begin{array}{r} 1,12 \\ 0,025 \\ \hline 560 \\ 224 \\ \hline 0,02800 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 112 \\ 25 \\ \hline 560 \\ 224 \\ \hline 2\,800 \end{array}$$

et l'on voit qu'elle est la même que la multiplication des numérateurs 112 et 25; il y a seulement lieu de tenir compte, lorsqu'on sépare les décimales, des zéros qui peuvent se trouver à droite du produit; et aussi d'écrire à gauche un nombre suffisant de zéros pour qu'il y en ait un à gauche de la virgule.

Pour mettre en évidence la *généralité* de la démonstration précédente il faut remarquer que les nombres de chiffres décimaux des deux facteurs sont égaux respectivement aux nombres de zéros qui figurent dans les dénominateurs 100 et 1 000, lorsqu'on les écrit sous forme de fractions ordinaires. Le dénominateur du produit écrit sous la

même forme est 100 000; il est le produit de 100 et de 1 000 et par suite (n° 18) renferme un nombre de zéros égal à la somme des zéros qui figurent dans 100 et 1 000; donc le nombre de chiffres décimaux qu'il faut séparer dans le produit est bien égal à la somme des nombres de chiffres décimaux des deux facteurs.

Division. — Les règles mêmes de l'addition, de la soustraction, de la multiplication, montrent que la somme, la différence, le produit de nombres décimaux, sont des nombres décimaux; il n'en est pas de même en général pour le quotient, de sorte que la division des nombres décimaux présente un tout autre caractère que les opérations précédentes; elle se rattache à la théorie des quotients approchés, que nous allons développer.

II. QUOTIENTS APPROCHÉS

64. **Définition du quotient approché à moins d'une unité décimale d'un ordre donné.** — Soit à diviser 13^{fr} entre 3 personnes; si ces 13^{fr} consistent en 13 pièces de 1^{fr} et que l'on ne puisse pas faire de monnaie, on a 13 unités indivisibles; on devra donc se contenter de donner 4^{fr} à chaque personne et il restera 1^{fr}; nous avons dit que 4 est le quotient *par défaut* de 13 par 3; nous l'appellerons d'une manière plus précise *quotient à une unité près par défaut,* pour bien marquer que l'on fait tort à chaque personne de moins d'une unité, c'est-à-dire de moins d'un franc.

Mais supposons que nous puissions échanger nos 13^{fr} contre des pièces de 10 centimes; nous en

aurons 130; nous pourrons en donner 43 à chaque personne et il en restera 1 ; 43 est le quotient par défaut de 130 par 3; or 43 pièces de 10 centimes équivalent à 4^{fr} et 3 dixièmes de franc; nous dirons que *c'est le quotient de 13^{fr} par 3 à moins d'un dixième de franc, par défaut;* car nous faisons tort à chaque personne de moins d'un dixième de franc, de moins d'un décime.

Si nous pouvions échanger nos 13^{fr} contre des pièces de 1 centime, nous aurions 1 300 centimes, et nous pourrions en donner 433 à chaque personne; chacune recevrait 4 francs et 33 centièmes de franc; 4,33 est le quotient de 13 par 3 à moins d'un centième, par défaut. On n'a pas assez d'argent pour donner à chacune 1 centime de plus; le produit par 3 de $4^{fr},33$ est en effet $12^{fr},99$, somme inférieure à 13^{fr}, mais le produit par 3 de $4^{fr},34$ est $13^{fr},02$, somme supérieure à 13^{fr}.

On voit nettement sur cet exemple quel est le mécanisme de l'opération et comment on obtient des quotients de plus en plus approchés, c'est-à-dire se rapprochant de plus en plus du partage exact, partage qui n'est pas possible avec les monnaies employées. Pour préciser ce qui précède, nous donnerons la définition suivante :

DÉFINITION — *On appelle quotient de deux nombres entiers ou décimaux à moins d'un dixième, ou d'un centième, ou d'un millième, etc., par défaut, le plus grand nombre exact de dixièmes, de centièmes, de millièmes, etc., dont le produit par le diviseur soit contenu dans le dividende.* Ainsi, dans l'exemple précédent, 4,33 ou $\frac{433}{100}$ est le quotient à un centième

près par défaut de 13 par 3, parce que l'on a :

$$\frac{433}{100} \times 3 < 13 < \frac{433}{100} \times 4.$$

Dans le cas où le produit d'un certain nombre de dixièmes, centièmes, etc., par le diviseur, reproduit exactement le dividende, ce nombre est le *quotient exact.*

65. — **Calcul du quotient approché.**

Règle. — *Pour trouver le quotient de deux nombres décimaux à moins d'une unité décimale d'ordre donné, on supprime la virgule dans le diviseur et on la recule vers la droite dans le dividende d'un nombre de rangs égal au nombre des chiffres décimaux du diviseur; on opère ensuite la division comme si le dividende et le diviseur étaient entiers, mais en ayant soin de placer une virgule après le chiffre du quotient fourni par le dividende partiel obtenu en abaissant le chiffre précédant immédiatement la virgule du dividende; on continue jusqu'à ce que l'on ait écrit au quotient les unités décimales de l'ordre cherché. Pour obtenir un nombre suffisant de chiffres au quotient, on inscrit, s'il est nécessaire, des zéros à droite des chiffres décimaux du dividende.*

Soit par exemple à diviser 2,342 par 1,32; on demande le quotient à $\frac{1}{1\,000}$ près; on disposera la division comme il suit :

234,200	132
102 2	1,774
9 80	
560	
32	

Le quotient cherché est 1,774.

Justification de la règle. — Si l'on considère la division précédente comme la division de 234 200 par 132, on voit que l'on a :

$$234\,200 = 132 \times 1\,774 + 32$$

et, par suite :

$$132 \times 1\,774 < 234\,200 < 132 \times 1\,775.$$

Dans le cas où le reste aurait été nul, la première de ces inégalités se serait changée en égalité.

On a donc aussi, en divisant par 100 000 :

$$\frac{132 \times 1\,774}{100\,000} < \frac{234\,200}{100\,000} < \frac{132 \times 1\,775}{100\,000}$$

$$\frac{132}{100} \times \frac{1\,774}{1\,000} < \frac{234\,200}{100\,000} < \frac{132}{100} \times \frac{1\,775}{1\,000}$$

$$1{,}32 \times 1{,}774 < 2{,}342 < 1{,}32 \times 1{,}775,$$

et ces dernières inégalités expriment bien que 1,774, nombre trouvé par la règle, est le quotient cherché à un millième près par défaut de 2,342 par 1,32. Si le reste avait été nul, au lieu d'être égal à 32, la première des inégalités se serait changée en égalité et l'on aurait eu le quotient exact.

Remarque. — Pour montrer nettement que la démonstration précédente est générale, il faut observer que le nombre de décimales du diviseur étant 2, et le nombre de décimales que l'on désirait avoir au quotient étant 3, on a déplacé la virgule dans le dividende de 2 rangs vers la droite, et l'on ensuite utilisé 3 chiffres décimaux du quotient; le dividende de 234 200 employé donne donc le dividende donné 2,34200, si l'on y sépare $2 + 3 = 5$ chiffres décimaux à droite, il est donc naturel que l'on ait pu dans les inégalités précédentes diviser par $100\,000 = 100 \times 1\,000$.

66. **Conversion des fractions ordinaires en fractions décimales** — Convertir une fraction ordinaire en fraction décimale, c'est chercher une fraction décimale qui lui soit égale. Une telle fraction n'existe pas toujours; lorsqu'elle existe, on l'obtient en divisant le numérateur par le dénominateur, et en poussant la division assez loin Exemples :

$$\frac{3}{4}=0,75 \qquad \begin{array}{r|l} 3,00 & 4 \\ \cline{2-2} 20 & 0,75 \\ 0 & \end{array}$$

$$\frac{112}{25}=4,48 \qquad \begin{array}{r|l} 112,00 & 25 \\ \cline{2-2} 12\,0 & 4,48 \\ 2\,00 & \\ 0 & \end{array}$$

Lorsque la conversion n'est pas possible, on s'en aperçoit à ce que les mêmes chiffres reviennent *périodiquement* au quotient; nous ne pouvons entrer ici dans l'étude des fractions *périodiques;* contentons-nous d'indiquer des exemples.

$$\frac{2}{3}=0,666... \qquad \begin{array}{r|l} 2,00 & 3 \\ \cline{2-2} 20 & 0,666 \\ 20 & \\ 20 & \end{array}$$

Il est manifeste que, si loin qu'on continue, on trouvera toujours 2 pour reste, 20 pour dividende partiel, et 6 comme chiffre à inscrire au quotient. Voici un autre exemple :

$$\frac{30}{11}=2,727... \qquad \begin{array}{r|l} 30,0 & 11 \\ \cline{2-2} 80 & 2,727 \\ 30 & \\ 80 & \\ 3 & \end{array}$$

Les restes sont alternativement 8 et 3 et les quotients alternativement 7 et 2.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE VIII

95. — Effectuer les additions suivantes :

$$2,035 + 0,034 + 0,0002$$
$$34,05 + 3,002 + 4,008$$
$$45,342 + 84,356 + 0,001.$$

96. — Effectuer les soustractions suivantes :

$$2,345 - 1,357$$
$$2,3 - 0,0002$$
$$4 - 0,34501$$
$$8,34 - 0,003.$$

97. — Effectuer les multiplications suivantes :

$$0,01 \times 0,01$$
$$0,035 \times 0,0024$$
$$300,2 \times 3,04.$$

98. — Effectuer les divisions suivantes à $\frac{1}{10}$ près par défaut :

$$3 : 42$$
$$0,2 : 0,012$$
$$0,003 : 0,0045$$
$$0,0001 : 0,2.$$

99. — Effectuer les mêmes divisions à $\frac{1}{1\,000}$ près.

100. — On veut partager un million de francs entre 6 342 personnes ; combien chacune recevra-t-elle, à 1 centime près ?

101. — Une feuille d'or a une forme rectangulaire ; ses dimensions sont de $2^{m},50$ et 3^{m} ; on demande quelle est son épaisseur, sachant qu'elle pèse 12^{kgr} et qu'un mètre cube d'or pèse environ $19\,360^{kgr}$.

102. — Un fil de fer a une section circulaire dont le diamètre est $1^{mm},25$; on demande de calculer le poids qu'aurait un fil semblable entourant la circonférence de l'équateur terrestre, sachant que le poids d'un décimètre cube de fer est environ $7\,500^{gr}$. On prendra $\pi = \frac{22}{7}$.

CHAPITRE IX

CARRÉ. RACINE CARRÉE

67. — On appelle carré d'un nombre le produit de ce nombre par lui-même; nous avons déjà expliqué la notation des exposants; on a :

$$4^2 = 4 \times 4 = 16$$
$$52^2 = 52 \times 52 = 2\,704$$
$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$
$$(0{,}3)^2 = 0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}09.$$

Théorème I. — *Le carré de la somme de deux nombres est égal à la somme des carrés de ces deux nombres, augmentée de leur double produit.*

Considérons, en effet, la somme $9 + 5$; on a :

$$\begin{aligned}(9+5)^2 = (9+5)(9+5) &= (9+5)\,9 + (9+5)\,5 \\ &= 9 \times 9 + 5 \times 9 + 9 \times 5 + 5 \times 5 \\ &= 9^2 + 5^2 + 2 \times 9 \times 5.\end{aligned}$$

Théorème II. — *Le carré d'une fraction irréductible est une fraction irréductible dont les termes sont les carrés des termes de la fraction donnée*

Soit en effet $\frac{12}{35}$ une fraction irréductible; si l'on décompose le numérateur et le dénominateur en facteurs premiers, il n'y a pas de facteurs premiers communs aux deux termes, puisque la fraction est irréductible; on a effectivement :

$$\frac{12}{35}=\frac{2\times 2\times 3}{5\times 7}.$$

On a donc :

$$\left(\frac{12}{35}\right)^2=\frac{2\times 2\times 3}{5\times 7}\times\frac{2\times 2\times 3}{5\times 7}=\frac{2\times 2\times 3\times 2\times 2\times 3}{5\times 7\times 5\times 7}$$

La fraction écrite en dernier lieu est irréductible, puisque le numérateur et le dénominateur sont décomposés en facteurs premiers et n'ont pas de facteur premier commun; le numérateur est égal à $12\times 12=12^2$ et le dénominateur à $35\times 35=35^2$. Le théorème est donc complètement démontré.

68. **Racine carrée**. Définition. — *On appelle racine carrée d'un nombre donné un nombre dont le carré soit égal à ce nombre donné.*

On désigne la racine carrée d'un nombre par le signe $\sqrt{}$ appelé *radical*, sous le trait horizontal duquel on inscrit ce nombre; la racine carrée de 160 000 s'écrit $\sqrt{160\,000}$. On a d'ailleurs :

$$\sqrt{160\,000}=400.$$

On a de même :

$$\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}$$

$$\sqrt{0,25}=0,5,$$

car on a :

$$400^2 = 160\,000$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$(0,5)^2 = 0,25.$$

Il arrive le plus souvent qu'un nombre n'a pas de racine carrée ; en effet, si la racine carrée d'un nombre entier n'est pas un nombre entier, ce n'est pas une fraction, car toute fraction est égale à une fraction irréductible et nous avons vu que le carré d'une fraction irréductible est une fraction irréductible ; ce n'est donc pas un nombre entier.

Les seuls nombres entiers qui soient *carrés parfaits*, c'est-à-dire qui ont une racine carrée exacte, sont donc les carrés des nombres entiers ; voici les plus petits d'entre eux qu'il est bon de connaître :

Nombres	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,
Carrés	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100,

Nombres	11,	12,	13,	14,	15,	16,	17,	18,	19
Carrés	121,	144,	169,	196,	225,	256,	289,	324,	361

De même que l'impossibilité de trouver dans tous les cas un quotient exact a conduit à définir la division approchée, on a été conduit à définir la racine carrée approchée.

69. **Racine carrée approchée.** Définition. — *On appelle racine carrée d'un nombre, à moins d'une unité par défaut, le plus grand nombre entier dont le carré est contenu dans ce nombre.*

Ainsi, la racine carrée de 38 est 6, car $6^2 = 36$ est compris dans 38, tandis que $7^2 = 49$ est supérieur à 38. De même, la racine carrée de 100,3

est 10, car $10^2 = 100$ est contenu dans 100,3 et il n'en est pas de même de $11^2 = 121$.

Définition. — *On appelle racine carrée d'un nombre entier ou fractionnaire, à moins d'un dixième, d'un centième, etc., par défaut, le plus grand nombre de dixièmes, de centièmes, etc., dont le carré est contenu dans ce nombre.*

Ainsi la racine carrée de 2 à $\frac{1}{100}$ près par défaut est 1,41, car on a :

$$(1,41)^2 = 1,41 \times 1,41 = 1,9881$$
$$(1,42)^2 = 1,42 \times 1,42 = 2,0164.$$

Donc 1,41 est bien le plus grand nombre de centièmes dont le carré est contenu dans 2.

Théorème. — *La racine carrée d'un nombre à $\frac{1}{100}$ près s'obtient en divisant par 100 la racine carrée à une unité près du produit de ce nombre par le carré de 100, c'est-à-dire par 10 000.*

En effet, dire que la racine carrée de 20 000 à une unité près est 141, c'est dire que l'on a :

$$(141)^2 < 20\,000 < (142)^2.$$

Si l'on divise par $10\,000 = 100^2$ on obtient :

$$\frac{(141)^2}{(100)^2} < 2 < \frac{(142)^2}{(100)^2},$$

c'est-à-dire :

$$\left(\frac{141}{100}\right)^2 < 2 < \left(\frac{142}{100}\right)^2$$
$$(1,41)^2 < 2 < (1,42)^2;$$

ce qui démontre le théorème. Si, au lieu de 20 000, on avait choisi un nombre ayant une racine carrée exacte, la première inégalité de chaque ligne se serait transformée en égalité.

Ce théorème permet de ramener l'extraction de la racine carréé à $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ près, à la racine carrée à une unité près; nous énoncerons cependant deux règles, laissant à l'élève le soin de démontrer qu'elles sont équivalentes.

70. — **Règles pour l'extraction de la racine carrée.**

Règle I. — *Pour extraire la racine carrée d'un nombre à une unité près, on néglige les décimales, s'il y en a, et l'on ne considère que la partie entière; on sépare le nombre entier en tranches de deux chiffres à partir de la droite, la dernière tranche à gauche pouvant n'avoir qu'un chiffre. Le premier chiffre de la racine s'obtient en prenant la racine carrée par défaut de la tranche de gauche. On élève ce chiffre au carré, et on retranche le résultat de la tranche de gauche; on obtient ainsi le premier reste partiel, à la droite duquel on abaisse la tranche suivante. Du nombre ainsi obtenu on sépare le dernier chiffre à droite et l'on divise la partie de gauche par le double du chiffre inscrit à la racine; on obtient ainsi le second chiffre de la racine ou un chiffre trop fort. Pour essayer ce chiffre on l'écrit à droite du double du chiffre trouvé à la racine et on multiplie le nombre ainsi formé par le chiffre à essayer. Si le produit peut se retrancher du nombre formé par le premier reste partiel et la seconde tranche, le chiffre essayé est bon et la différence est*

le second reste partiel. Si la soustraction n'est pas possible, le chiffre essayé est trop fort et l'on essaye de la même manière le chiffre immédiatement inférieur, et ainsi de suite jusqu'à ce que le chiffre essayé soit reconnu bon; on l'inscrit alors à la racine; à la droite du second reste partiel on abaisse la tranche suivante et l'on procède, pour obtenir le troisième chiffre de la racine, de la même manière que pour trouver le second. On obtient le chiffre à essayer en séparant un chiffre à droite dans le nombre formé par le second reste partiel et la tranche abaissée et divisant la partie de gauche par le double du nombre formé par les chiffres déjà trouvés de la racine, et on l'essaye en l'inscrivant à la droite de ce nombre, le multipliant par le nombre ainsi formé et retranchant le produit obtenu du nombre formé par le second reste partiel et la troisième tranche. On continue de la sorte jusqu'à ce que l'on ait épuisé toutes les tranches. Le dernier reste est le reste de l'opération.

Exemple. — Soit à extraire la racine carrée de 33571; on dispose ainsi l'opération : Le premier chiffre de la racine est 1, au-dessous duquel on inscrit son double 2; la règle conduit à prendre comme second chiffre le quotient de 23 par 2; ce quotient est 11; on essayera 9, car 10, 11 ne sont pas des chiffres; pour essayer 9 on multiplie mentalement 29 par 9 et l'on constate que le produit ne peut se retrancher de 235; on essaye alors 8; on effectue le produit de 28 par 8 et on le retranche (sans l'écrire) de 235 : 8 fois 8,

3 35 71	183
2 35	29 363
11 71	28
82	

64 ôtés de 65, 1 et je retiens 6; 8 fois 2, 16 et 6, 22 ôtés de 23 reste 1 ; le second reste partiel est 11. On obtient le troisième chiffre en divisant 117 par 36 double de 18; le quotient 3 essayé se trouve être bon, car 3 fois 363 peut se retrancher de 1 171 ; le reste est 32; c'est le reste; la racine est 183. L'élève vérifiera que l'on a $33\,571 = 183 \times 183 + 82$.

Remarque. — Le reste ne peut pas être plus grand que le double de la racine; s'il l'était, on en conclurait que l'on a fait quelque erreur et on la rechercherait.

Règle II. — *Pour extraire la racine carrée d'un nombre entier ou décimal à moins d'un millième près, par exemple, on déplace la virgule de six rangs vers la droite, c'est-à-dire d'un nombre de rangs égal au double de l'ordre des unités décimales que l'on désire (ici les millièmes sont du troisième ordre). Pour pouvoir ainsi déplacer la virgule, on a préalablement, s'il est nécessaire, inscrit des zéros à droite de la partie décimale. Cela fait on néglige les chiffres situés à droite de la virgule déplacée et l'on extrait la racine carrée à une unité près du nombre entier ainsi obtenu. La racine obtenue exprime le nombre de millièmes cherchés; on doit donc, pour écrire le résultat sous forme de nombre décimal, séparer à droite trois chiffres décimaux. Pour avoir le reste il faut séparer dans le reste obtenu un nombre de chiffres décimaux égal au nombre de rangs dont on a déplacé la virgule vers la droite et abaisser ensuite, s'il y a lieu, à droite, les chiffres décimaux négligés.*

EXERCICES SUR LE CHAPITRE IX

103. — Extraire la racine carrée de 3 500, de 3 275, de 3 850, à une unité près par défaut.

104. — Extraire la racine carrée à une unité près par défaut de 10 000 000, de 967 584.

105. — Extraire la racine carrée à $\frac{1}{1\,000}$ près des nombres : 2, 3, 10.

106. — Extraire la racine carrée à $\frac{1}{100\,000}$ près de $\frac{3}{4}$, de $\frac{5}{6}$, de $\frac{2}{3}$.

107. — Quel est le rayon d'un cercle, sachant que sa surface est 25 hectares ?

108. — Quel est le rayon d'un cercle, sachant que sa surface est 3 mètres carrés ?

109. — On demande quel est le diamètre d'un fil de cuivre, sachant qu'un mètre cube de cuivre pèse environ 8 950^{kgr}, et que 1 225^{km} de ce fil pèseraient 10 000^{kgr}. La section du fil est supposée circulaire : on prendra $\pi = \frac{22}{7}$.

CHAPITRE X

PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

71. **Progressions arithmétiques.** — On dit que plusieurs nombres rangés dans un ordre déterminé *forment une progression arithmétique* ou *sont en progression arithmétique*, lorsqu'ils vont constamment en croissant ou constamment en décroissant, et que la différence entre deux consécutifs est toujours la même[1]. Par exemple, les nombres :

$$2, \quad 5, \quad 8, \quad 11, \quad 14$$

forment une progression arithmétique *croissante;* les différences $5-2$, $8-5$, $11-8$, $14-11$ sont toutes égales à 3; cette valeur constante de la diffé-

1. En Algèbre, il suffit de dire que la différence est la même *en grandeur et en signe*, cette condition entraîne la conséquence que les termes vont constamment en croissant si cette différence est positive, et constamment en décroissant si elle est négative.

rence s'appelle la *raison* de la progression. Les nombres 2, 5, 8, 11, 14 sont les *termes* de la progression; 2 est le *premier terme*, 5 le *second terme*, ..., 14 le *dernier terme*.

De même les nombres :

18, 14, 10, 6

forment une progression *décroissante;* ici, chaque terme est inférieur au précédent; la différence constante est 4; on dit que la raison est —4, le signe *moins* indiquant que la progression est décroissante.

Dans une progression croissante on obtient les termes successifs à partir du premier par des *additions* répétées de nombres égaux à la raison; par exemple, on obtient la progression de cinq termes citée plus haut, sachant que son *premier terme* est 2 et sa raison 3, par le calcul suivant :

$$2+3=5; \quad 5+3=8; \quad 8+3=11; \quad 11+3=14.$$

De même, la progression décroissante de raison —4 et de premier terme 18, s'obtiendra par des soustractions successives :

$$18-4=14; \quad 14-4=10; \quad 10-4=6.$$

Nous nous bornerons à l'étude des *progressions croissantes*.

Problème. — *Obtenir un terme de rang donné d'une progression arithmétique, connaissant le premier terme et la raison.*

Soit proposé, par exemple, d'obtenir le 5[e] terme d'une progression arithmétique dont le premier terme est 12 et la raison 35. Le second terme est

12 + 35, le troisième 12 + 35 + 35, le quatrième 12 + 35 + 35 + 35 et le cinquième 12 + 35 + 35 + 35 + 35, c'est-à-dire 12 *plus quatre fois* 35, ce qui peut s'écrire :

$$12 + 35 \times 4 = 12 + 140 = 152.$$

On obtient donc la règle suivante.

RÈGLE. — *Un terme de rang donné d'une progression arithmétique s'obtient en ajoutant au premier terme le produit de la raison par le nombre entier immédiatement inférieur au rang, c'est-à-dire par le rang moins un.*

On se rend aisément compte de la nécessité de diminuer le rang d'une unité en appliquant la règle au premier ou au second rang.

Si l'on désigne par a le premier terme, par r la raison, par n le rang donné et par l la valeur du terme qui occupe ce rang, cette règle se traduit par la formule :

$$l = a + (n - 1)\,r.$$

72. **Somme des termes d'une progression arithmétique**. — On a souvent besoin de calculer rapidement la somme des termes d'une progression arithmétique ; si le nombre des termes est très petit, il n'y a qu'à faire l'addition ; s'il est grand, on peut employer un procédé plus rapide que nous allons exposer.

Soit la progression :

$$2,\quad 5,\quad 8,\quad 11,\quad 14,\quad 17,\quad 20,$$

on se propose de calculer la somme :

$$S = 2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20.$$

On remarque que l'on peut écrire en renversant l'ordre des termes de la somme :

$$S = 20 + 17 + 14 + 11 + 8 + 5 + 2.$$

Ajoutons les deux valeurs de S en groupant les termes de même rang dans les deux sommes ; nous aurons :

$$2S = (2+20)+(5+17)+(8+14)+(11+11)+(14+8)+(17+5)+(20+2)$$

c'est-à-dire

$$2S = 22 + 22 + \ldots\ldots + 22 = 22 \times 7$$

ou enfin

$$S = \frac{22 \times 7}{2} = 11 \times 7 = 77.$$

On voit que la simplicité du calcul est due à ce que les sommes $2 + 20$, $5 + 17$, etc., sont toutes égales à 22 ; on se trouve ainsi amené à une multiplication, opération plus simple que l'addition. Cette simplification se produira pour toutes les progressions arithmétiques ; elle est due à ce que *la somme de deux termes également éloignés des extrêmes est égale à la somme des termes extrêmes.* Par exemple, la somme du second terme et de l'avant-dernier est égale à la somme du premier et du dernier, car le second est égal au premier *plus* la raison et l'avant-dernier au dernier *moins* la raison ; la somme ne change donc pas puisqu'on y ajoute un certain nombre, égal à la raison, et qu'on en retranche le même nombre.

Il résulte du calcul fait plus haut, que le double de la somme est égal au produit de la somme des

termes extrêmes par le nombre des termes ; on peut dire aussi que *la somme est égale au produit du nombre des termes par la demi-somme* (ou *moyenne arithmétique*) *des termes extrêmes.*

Il est facile d'obtenir directement la formule qui traduit la règle précédente ; désignons par

$$a,\ b,\ c,\ \ldots\ldots,\ k,\ l$$

la progression arithmétique, par n le nombre de ses termes, et par S sa somme, nous avons :

$$S = a + b + \ldots + k + l$$
$$S = l + k + \ldots + b + a,$$

on obtient :

$$2S = (a + l) + (b + k) + \ldots + (k + b) + (l + a),$$

et comme toutes les parenthèses sont égales[1], il en résulte :

$$2S = n\,(a + l)$$

$$S = \frac{n\,(a + l)}{2}.$$

Telle est la formule cherchée.

Les nombres impairs forment une progression arithmétique de raison 2 ; calculons la somme S des n premiers nombres impairs :

$$S = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1).$$

---

1. Cette égalité est évidente car chaque parenthèse est la somme de deux termes et, lorsqu'on passe de l'une d'elles à la suivante, l'un des termes augmente de r et l'autre diminue de r ; la somme reste constante : on a, par exemple : $b = a + r$, $k = l - r$.

Nous aurons $a = 1$, $l = 2n - 1$ et, par suite :

$$S = \frac{n(2n - 1 + 1)}{2} = n^2.$$

C'est là un résultat très remarquable par sa simplicité. On peut l'établir directement à l'aide d'une figure très simple (fig. 1).

Considérons deux axes rectangulaires Ox, Oy sur lesquels sont portés des longueurs égales :

$$OA = AD = DG = GL = CP = OC = CF = FK = KN = NR.$$

Traçons en traits forts les carrés OABC, ODEF, OGHK, OLMN, OPQR et en pointillés les lignes qui divisent ces carrés en carrés égaux; il est clair que l'un des grands carrés, par exemple OPQR, renferme un nombre de petits carrés égal au carré de son rang; à $5^2 = 25$ pour l'exemple choisi; d'autre part, pour évaluer ce nombre de petits carrés, nous pouvons remarquer que nous avons le carré OABC, c'est-à-dire 1 carré, puis les petits carrés compris dans la

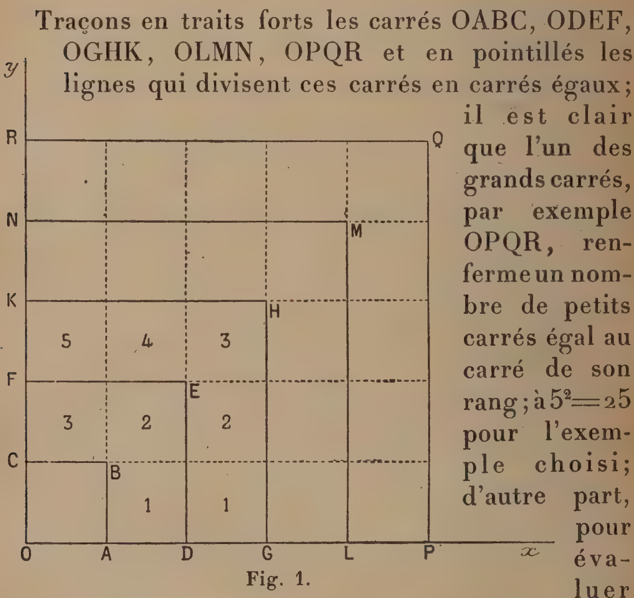


Fig. 1.

figure ABCFEDA, au nombre de 3 (ils sont numérotés 1, 2, 3); puis les 5 petits carrés compris entre DEF et GHK (numérotés 1, 2, 3, 4, 5), etc., c'est-à-dire un nombre total de petits carrés égal à :

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9,$$

c'est-à-dire à la somme des 5 premiers nombres impairs.

On voit ainsi que *la somme des n premiers nombres impairs est égale à* n^2, résultat utile à connaître.

Comme autre application, calculons la somme des n premiers nombres entiers; ils forment une progression arithmétique dont la raison est 1; le premier terme est 1, le dernier n et leur nombre n; on a donc :

$$S = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exemple. — *Calculer la somme des 1000 premiers nombres.* Il suffit de remplacer n par 1000 dans la formule précédente; il vient :

$$S = \frac{1\,000 \times 1\,001}{2} = 500 \times 1\,001 = 500\,500.$$

73. **Progressions géométriques**. — On dit que plusieurs nombres, rangés dans un ordre déterminé, *forment une progression géométrique ou sont en progression géométrique*, lorsque le quotient de deux nombres consécutifs a toujours la même valeur. Par exemple les nombres

$$3, \quad 6, \quad 12, \quad 24$$

sont en progression géométrique car l'on a :

$$6 : 3 = 2;\ 12 : 6 = 2;\ 24 : 12 = 2.$$

Ce quotient 2 est dit la *raison* de la progression. De même les nombres

$$3\,600,\quad 360,\quad 36,\quad 3{,}6\quad 0{,}36,$$

forment une progression dont la raison est 0,1.

Lorsqu'on connaît le premier terme et la raison d'une progression géométrique, il est facile de calculer successivement tous les termes; il suffit de multiplier successivement chaque terme par la raison pour avoir le terme suivant.

Exemple. — *Former une progression géométrique de 5 termes dont le premier terme soit 625 et la raison 1,2.* On obtient successivement $625 \times 1{,}2 = 750$; $750 \times 1{,}2 = 900$; $900 \times 1{,}2 = 1080$; $1080 \times 1{,}2 = 1296$. La progression cherchée est donc :

$$625,\quad 750,\quad 900,\quad 1\,080,\quad 1\,296.$$

Il arrive souvent que l'on veut connaître la valeur d'un terme de rang déterminé, sans calculer les termes intermédiaires. Dans ce but, on remarque que le *second* terme est égal au *produit du premier par la raison;* le *troisième* terme est égal au produit du second par la raison, c'est-à-dire au produit *du premier terme par le carré de la raison;* le *quatrième* terme est de même égal au produit du premier par le *cube* de la raison, etc. On a donc la règle suivante.

Règle. — *Pour obtenir un terme de rang donné d'une progression géométrique dont on connaît le premier terme et la raison, on multiplie le premier*

terme par une puissance de la raison dont l'exposant est égal au rang donné diminué d'une unité[1].

Si l'on désigne par a le premier terme, par q la raison, par n le rang donné et par l le terme cherché, cette règle se traduit par la formule

$$l = aq^{n-1}.$$

Dans le cas où la raison q est un nombre positif supérieur à 1 les termes vont en croissant et la progression géométrique est dite *croissante;* elle est *décroissante* si q est un nombre positif inférieur à 1.

74. **Somme des termes d'une progression géométrique.** — Soit, par exemple, la progression :

$$3, \quad 12, \quad 48, \quad 192, \quad 768$$

dont le premier terme est 3 et la raison 4; on a :

$$3 \times 4 = 12; \quad 12 \times 4 = 48; \quad 48 \times 4 = 192; \quad 192 \times 4 = 768.$$

Nous nous proposons de calculer la somme S de ses termes; on a :

$$S = 3 + 12 + 48 + 192 + 768.$$

Multiplions S par la raison 4 de la progression; il suffira de multiplier chaque terme par 4, ce qui donnera :

$$4S = 12 + 48 + 192 + 768 + 3\,072.$$

1. Cette règle n'est avantageuse pour le calcul pratique que si l'on utilise les tables de logarithmes pour l'élévation aux puissances; sinon, elle conduit à peu près aux mêmes opérations que le calcul direct.

Si nous retranchons la valeur de S de celle de 4S, nous remarquons que les termes 12, 48, 192, 768 disparaissent dans la différence; il vient donc :

$$4S - S = 3S = 3\,072 - 3 = 3\,069$$

d'où :

$$S = \frac{3\,069}{3} = 1\,023.$$

Il est aisé de généraliser la méthode suivie; soit une progression géométrique quelconque, dont nous désignerons le premier terme par a et la raison par q; si la progression a n termes, le dernier terme l est donné par la formule :

$$l = aq^{n-1}.$$

Nous nous proposons d'évaluer la somme :

$$S = a + aq + \ldots + aq^{n-1},$$

nous avons :

$$Sq = aq + aq^2 + \ldots + aq^n,$$

et, par suite, en retranchant les deux égalités précédentes :

$$S(q - 1) = aq^n - a = lq - a,$$

c'est-à-dire :

$$S = \frac{lq - a}{q - 1},$$

Telle est la formule cherchée. Si la raison q avait été plus petite que l'unité, on aurait retranché Sq de S et obtenu :

$$S = \frac{a - lq}{1 - q}.$$

Application. — Cherchons la somme des termes de la progression géométrique croissante :

3 9 27 81 243 729.

Le premier terme est 3, le dernier 729 et la raison est 3.

On a donc :

$$S = \frac{729 \times 3 - 3}{3 - 1} = \frac{728 \times 3}{2} = 364 \times 3 = 1\,092.$$

EXERCICES SUR LE CHAPITRE X

110. — Calculer le cinquième terme d'une progression arithmétique dont le premier terme est 4 et la raison 3.

111. — Former une progression arithmétique de 5 termes dont le premier terme soit 6 et la raison 2. Calculer sa somme.

112. — Former une progression arithmétique de 6 termes dont le premier terme soit 12 et le dernier 112. Calculer sa somme.

113. — Former une progression arithmétique de 6 termes dont le premier terme soit 1 et le second 2. Calculer sa somme.

114. — Un père a six enfants dont l'aîné a vingt ans; chacun a deux ans de plus que le suivant; le père donne à chacun un nombre de francs égal à son âge exprimé en années; combien lui faut-il de francs en tout?

115. — Les 18 élèves d'une classe ayant été rangés sur une ligne, on donne 10 billes au premier, 13 au suivant, et ainsi de suite, en donnant à chacun 3 de plus qu'à celui qui le précède. Combien faut-il de billes en tout?

116. — Calculer le quatrième terme d'une progression géométrique dont le premier terme est 5 et la raison 4.

117. — Former une progression géométrique de 6 termes dont le premier terme soit 729 et la raison $\frac{4}{3}$. Calculer la

somme des termes de cette progression. Vérifier le résultat en effectuant directement la somme.

118. — Former une progression géométrique de trois termes dont le premier soit 4 et le troisième 36.

119. — Si l'on prend de deux en deux, ou de trois en trois, etc., les termes d'une progression arithmétique (ou géométrique), on obtient encore une progression arithmétique (ou géométrique). Quelle est la raison de la nouvelle progression ?

120. — Une progression géométrique de 9 termes a pour premier terme 3 et pour dernier terme 768. Calculer les termes intermédiaires (on calculera d'abord le cinquième terme, puis le troisième, puis le septième).

121. — Un père a 4 enfants ; il donne à l'aîné 1 000^{fr}, au suivant les $\frac{4}{5}$ de cette somme, au suivant les $\frac{4}{5}$ de cette nouvelle somme, etc. Combien donne-t-il en tout d'argent à ses enfants ?

CHAPITRE XI

REVISION DU SYSTÈME MÉTRIQUE

75. **But et origine du système métrique.** — Il y a de grands avantages, pour les transactions commerciales, à ce que les unités de mesure soient fixées d'une manière précise, la même pour tout un pays ; les transactions internationales sont facilitées lorsque ces unités sont les mêmes pour divers peuples. Avant la Révolution, la variété des *mesures locales* rendait le commerce très difficile; un commerçant qui achetait des *aunes* d'étoffe devait savoir que l'aune n'avait pas la même valeur ici ou là, etc. L'Assemblée nationale, le 9 mai 1790, décida de créer un système de mesures général pour la France et pouvant être adopté par les pays étrangers. Pour éviter les susceptibilités internationales qui sont un grand obstacle à bien des progrès [1], la *base* du système était une mesure

1. Par exemple, ce sont ces susceptibilités qui se sont opposées jusqu'ici à l'unification des méridiens. Il est d'ailleurs probable que, de même que les Anglais se décideront définitivement à adopter le système métrique, les Français finiront par accepter le méridien de Greenwich, généralement adopté par les peuples civilisés.

effectuée sur le globe terrestre. Le *mètre* était défini comme la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre, c'est-à-dire de l'arc de méridien qui va du pôle à l'équateur[1]. Le mètre déposé aux *Archives nationales* a été construit de manière à satisfaire le plus exactement possible à cette définition. On a fait plus tard des mesures plus précises du méridien, et il est probable que les progrès de la géodésie conduiront à rectifier encore les mesures faites. Aussi, pour avoir un étalon stable, on a convenu que l'unité légale est le *mètre des Archives* ou plutôt sa copie exacte déposée au *Pavillon international des Poids et Mesures* de Breteuil, où l'on a fait d'autres copies exactes de cet étalon pour fournir un *étalon national* à chacune des nations qui ont adopté le système métrique[2].

Au *mètre*, unité fondamentale, ont été rattachées toutes les autres unités; la plus importante est l'unité de *poids;* le *kilogramme* a été défini primitivement[1] comme le poids d'un décimètre cube d'eau distillée à son maximum de densité; cette définition avait le même caractère international que celle du mètre; mais la nécessité d'avoir un étalon stable, qui ne se modifie pas lorsque la précision des mesures physiques augmente, l'ont

1. Si l'on adopte la division centésimale du quart de cercle (voir la *Géométrie* et la *Trigonométrie*), le *grade* ou centième du quart de cercle correspond à 100 000 mètres, la minute centésimale, ou centième de grade, à 1 000 mètres et la seconde centésimale, ou centième de minute, à 10 mètres.

2. La différence entre le mètre officiel et le mètre théorique défini par l'Assemblée nationale est d'environ deux dixièmes de millimètre.

fait abandonner; actuellement, le *kilogramme légal* est une certaine masse de platine déposée au Pavillon de Breteuil; il diffère très légèrement du *kilogramme théorique*.

Les créateurs du système métrique y avaient rattaché aussi le système des monnaies; mais une circonstance économique a rendu cette partie de leur œuvre très inférieure au reste et l'empêchera probablement de devenir jamais internationale; au moment de la création du système métrique la monnaie principale était la monnaie d'*argent;* actuellement, pour des raisons qu'il serait trop long d'exposer, c'est l'or qui est la monnaie d'échange internationale; de sorte que la véritable monnaie internationale, dérivée du système métrique, serait le *gramme d'or*. Cette monnaie est d'ailleurs jusqu'ici purement théorique, c'est-à-dire n'a été réalisée nulle part. Elle vaudrait 3 fr 10 de notre monnaie.

Le système métrique est devenu légal en France en 1840; sous le nom de système C. G. S. il a été adopté en 1881 par un Congrès international d'électriciens pour servir de base aux unités de mesure électriques adoptées par les savants de tous les pays. Cette adoption a été la consécration des vues des hommes de génie qui furent ses créateurs; si leur œuvre a pris ainsi une importance universelle, c'est qu'en la créant, ils n'ont pas séparé les intérêts de la science de ceux de l'humanité; ils ont su donner à leur conception scientifique un caractère international et ont ainsi rendu service à toutes les nations, tout en réservant à la France la gloire et le profit d'avoir ouvert la voie.

76. **Mesures de longueur**. — Reprenons maintenant en détail les diverses catégories de mesures. Les mesures de longueur sont le mètre, que nous avons défini, et ses multiples et sous-multiples décimaux. Les multiples usités sont le décamètre (10 mètres), l'hectomètre (100 mètres), le kilomètre (1000 mètres) et le myriamètre (10 000 mètres). Le kilomètre est l'unité usuelle pour la mesure des distances terrestres.

Les sous-multiples usités sont le décimètre, le centimètre et le millimètre (dixième, centième et millième du mètre); on doit y joindre le *micron* (millième de millimètre ou millionième de mètre) dont les physiciens et les biologistes font grand usage.

Les mesures pratiques communément employées sont le décamètre ou *chaîne d'arpenteur* pour les mesures sur le terrain, le mètre en bois ou en ruban pour les étoffes, le *double-décimètre* pour les mesures de précision. Pour les mesures de très grande précision, on utilise des procédés spéciaux dont l'étude fait partie de la physique. Nous avons résumé tout ceci dans un tableau où à côté de chaque unité se trouve figurée, dans un exemple, l'abréviation usuelle.

77. **Mesures de superficie**. — Les mesures de *surfaces*, *aires* ou *superficies*, sont liées aux mesures de longueur; on sait, en effet, que l'aire d'un rectangle est égale au produit de ses dimensions *à condition que l'on prenne pour unité d'aire le carré construit sur l'unité de longueur*. On a donc avantage à réaliser cette condition; les unités de surface correspondent donc aux unités de lon-

gueur : le mètre carré est la surface d'un carré de un mètre de côté, le décamètre carré, la surface d'un carré d'un décamètre de côté, etc.

Tableau des mesures de longueur.

Unité fondamentale : **mètre** (m). Ex. : $23^{m},457$.

MULTIPLES

décamètre (dam)	$= 10^{m}$	Ex. : $2\,340^{m} = 234^{dam}$
hectomètre (hm)	$= 100^{m}$	Ex. : $3\,200^{m} = 32^{hm}$
kilomètre (km)	$= 1\,000^{m}$	Ex. : $25\,000^{m} = 25^{km}$
myriamètre (Mm)	$= 10\,000^{m}$	Ex. : $48\,000^{m} = 4^{Mm},8$

Le *kilomètre* est surtout usité; on désigne souvent sous le nom de *lieue* une distance de 4^{Km} ou $4\,000^{m}$.

SOUS-MULTIPLES

décimètre (dm)	$= 0^{m},1$	Ex. : $2^{m},15 = 21^{dm},5$
centimètre (cm)	$= 0^{m},01$	Ex. : $3^{m},42 = 342^{cm}$
millimètre (mm)	$= 0^{m},001$	Ex. : $0^{m},723 = 723^{mm}$
micron	$= 0^{m},000001$ $= 0^{mm},001$	Ex. : $0^{mm},023 = 23\mu$

Les sous-multiples usuels sont le centimètre et le millimètre.

MESURES EFFECTIVES [1]

Chaîne d'arpenteur $= 1^{dam}$; mètre; double-décimètre.

Il est important d'observer que, lorsque le côté d'un carré devient 10 fois plus grand sa surface devient 100 fois plus grande; un décamètre carré vaut donc 100 mètres carrés; les élèves pourront figurer un décimètre carré et constater qu'il con-

1. Les mesures effectives légales sont le mètre, le décimètre, le décamètre, leur double et leur moitié (sauf le demi-décimètre); celles que nous indiquons sont de beaucoup les plus usitées.

tient cent centimètres carrés, en le divisant en carrés d'un centimètre de côté. C'est là un point qu'il faut bien retenir : hectomètre carré, par exemple, ne veut pas dire 100 mètres carrés, mais carré d'un hectomètre de côté, soit 10 000 mètres carrés.

Lorsqu'il s'agit de mesurer des champs, l'usage a fait donner des noms différents aux unités de surface ; on les nomme alors mesures *agraires*. L'unité agraire principale est le décamètre carré qu'on appelle *are* et les unités dérivées sont l'*hectare*, qui vaut 100 ares et équivaut par suite à l'hectomètre carré, et le *centiare*, ou centième d'are, qui équivaut au mètre carré.

Tableau des mesures de surface.

Unité fondamentale : **mètre carré** (m^2). Ex. : $25^{m2},3452$.

MULTIPLES

décamètre carré (dam^2) =	100^{m2}	Ex. : $6\,250^{m2} = 62^{dam2},50$
hectomètre carré (hm^2) =	$10\,000^{m2}$	Ex. : $250\,000^{m2} = 25^{hm2}$
kilomètre carré (km^2) =	$1\,000\,000^{m2}$	Ex. : $3\,500\,000^{m2} = 3^{km2},5$

SOUS-MULTIPLES

décimètre carré (dm^2) =	$0^{m2},01$	Ex. : $25^{m2},3 = 2\,530^{dm2}$
centimètre carré (cm^2) =	$0^{m2},000\,1$	Ex. : $0^{m2},35 = 3\,500^{cm2}$
millimètre carré (mm^2) =	$0^{m2},000\,001$	Ex. : $0^{m2},008 = 8\,000^{mm2}$

Mesures agraires.

are (a) =	$1^{dam2} = 100^{m2}$	Ex. : $235^{a},32 = 235^{dam2},32 = 23\,532^{m2}$
hectare (ha) =	$100^{a} = 1^{hm2} = 10\,000^{m2}$	Ex. : $72^{ha2},345\,7 = 723\,457^{m2}$
centiare (ca) =	$0^{a},01 = 1^{m2}$	Ex. : $8357^{ca} = 83^{a},57 = 8\,357^{m2}$

On écrit aussi $729\,635^{m2} = 72^{ha}96^{a}35^{ca}$.

Les abréviations employées pour les carrés utilisent l'exposant ²; l'exposant ³ est réservé pour les cubes.

Il n'y a pas de mesures *effectives* de surface; pour évaluer une surface donnée, on mesure des longueurs et on fait ensuite des calculs suivant les méthodes que l'on apprend en *géométrie*.

78. **Mesures de volume et de capacité.** — Les mesures de volume sont, pour les mêmes raisons que les mesures de surface, dérivées des mesures de longueur; le *mètre cube* est le volume d'un cube d'un mètre d'arête.

Les multiples du mètre cube ne sont pas usités; les sous-multiples sont le décimètre cube, le centimètre cube, le millimètre cube; le décimètre cube est la *millième* partie du mètre cube, comme on le voit aisément par une figure. Si l'on suppose AB = AD = AL = 1^{m}, le mètre cube ABCDLIJK contient 10 tranches telles que ABCDEFGH, dont chacune contient 100 décimètres cubes; il contient donc en tout 100 × 10 = 1 000 décimètres cubes (fig. 2).

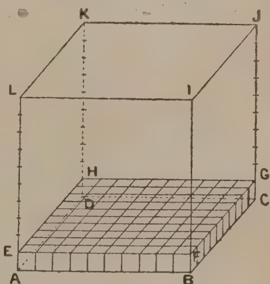


Fig. 2.

Le décimètre cube prend usuellement le nom de *litre*. Les multiples et sous-multiples décimaux du litre sont désignés par la nomenclature usuelle (décalitre, décilitre, etc., voir le tableau) Les mesures *effectives*, c'est-à-dire dont on se sert réellement, sont, d'après la loi, les mesures décimales,

leur double et leur moitié (voir le tableau ci-contre). Elles ont des formes diverses, consacrées par



Fig. 3.
Litre en étain pour le vin.

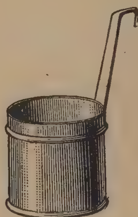


Fig. 4.
Litre en fer-blanc pour le lait.



Fig. 5.
Litre en bois pour les matières sèches.

l'usage, suivant les emplois auxquels elles sont destinées (fig. 3, 4, 5, 6).

Le mètre cube prend le nom de *stère* lorsqu'on mesure du bois de chauffage; l'usage devient d'ailleurs de plus en plus général de *peser* le bois au lieu de le mesurer.

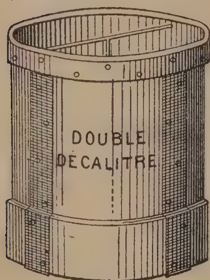


Fig. 6.
Mesure pour les matières sèches.

79. **Mesures de poids.** — L'unité fondamentale de poids est le *gramme*, défini comme le poids d'un centimètre cube d'eau distillée à son maximum de densité; actuellement, cette définition n'est pas absolument rigoureuse, mais elle peut être regardée comme telle dans la pratique usuelle, l'erreur étant très faible; il en résulte une correspondance remarquable entre les mesures de poids et les mesures de volume,

Tableau des mesures de volume ou capacité.

Unité fondamentale : **mètre cube** (m^3). Ex. $63^{m3},235$.

Les MULTIPLES ne sont pas usités.

SOUS-MULTIPLES

décimètre cube (dm^3)	$= 0^{m3},001$	Ex. : $2^{m3},3 = 2\ 300^{dm3}$
centimètre cube (cm^3)	$= 0^{dm3},001$	Ex. : $4^{dm3},52 = 4\ 520^{cm3}$
millimètre cube (mm^3)	$= 0^{cm3},001$	Ex. : $0^{cm3},3 = 300^{mm3}$

Le **litre** (l) joue le rôle d'unité fondamentale.

litre (l)	$= 1^{dm3}$	$= 0^{m3},001$	Ex. : $3^{m3},7 = 3\ 700^{l}$
décalitre (dal)	$= 10^{l}$	$= 0^{m3},01$	Ex. : $25^{m3} = 2\ 500^{dal}$
hectolitre (hl)	$= 100^{l}$	$= 0^{m3},1$	Ex. : $12^{m3} = 120^{hl}$
décilitre (dl)	$= 0^{l},1$	$= 100^{cm3}$	Ex. : $300^{cm3} = 3^{dl}$
centilitre (cl)	$= 0^{l},01$	$= 10^{cm3}$	Ex. : $253^{cm3} = 25^{cl},3$

Le millilitre (ml) (non usité) équivaudrait au centimètre cube.

MESURES EFFECTIVES PRATIQUEMENT USITÉES

Litre, double-litre, demi-litre.
Décalitre, double-décalitre, demi-décalitre.
Décilitre, double-décilitre.

L'hectolitre, le demi-hectolitre, le demi-décilitre, le double-centilitre, le centilitre sont des mesures légales, mais pratiquement peu usitées.

correspondance utile à connaître et que nous résumons dans le tableau suivant :

1^{cm3} d'eau distillée à 4° pèse 1 **gramme** (g.).

1^{dm3} ou 1^{l} pèse 1^{kg}	1^{dl} pèse 100^{g}
1^{dal} pèse 10^{kg}	1^{cl} pèse 10^{g}
1^{hl} pèse $100^{kg} = 1$ quintal métrique	1^{mm3} pèse $0^{g},001 = 1^{mg}$
1^{m3} pèse $1\ 000^{kg}$ ou 1 tonne (t)	10^{mm3} pèsent 1^{cg}

$3^{hl},35$ pèsent 335^{kg}.
$0^{l},86$ pèse 860^{g}

Les mesures pratiques de poids sont les multiples et sous-multiples décimaux du gramme; pour les poids considérables, on utilise le *quintal métrique* qui vaut 100^{kg} et la *tonne* qui vaut 1000^{kg}.

Les mesures effectives sont les mesures usuelles, leur double et leur moitié. Une *boîte de poids* est composée normalement de manière que tous les poids inférieurs à un poids donné aient un poids total égal à ce dernier, à l'exception des poids doubles d'une unité décimale, qui sont suivis de deux poids égaux à leur moitié. Par exemple, une boîte de 2^{kg} renfermera les poids suivants :

1^{kg}, 500^{g}, 200^{g}, 100^{g}, 100^{g}, 50^{g}, 20^{g}, 10^{g}, 10^{g}, 5^{g}, 2^{g}, 1^{g}, 1^{g}.

On s'arrête, par exemple, aux poids de 1^{g}; la somme des poids inférieurs, s'il y en avait, serait de même égale à 1^{g}; souvent on met 2 poids de 2^{g} et un seul de 1^{g}, de manière à avoir exactement un poids total de 2^{kg}. Avec ces poids on peut former exactement un poids quelconque inférieur à 2^{kg}. Pour peser un objet, on place cet objet dans un des plateaux de la balance et on met successivement dans l'autre plateau tous les poids dans l'ordre dans lequel ils sont rangés, en les prenant un à un et commençant par les plus élevés. A chaque fois que l'on met un poids, on observe de quel côté penche la balance; si elle penche vers l'objet, on laisse le poids; sinon, on le retire; ensuite, on continue de même avec le poids suivant[1]. On arrive ainsi à peser sans erreurs ni tâtonnements.

---

1. Les débutants feront sagement d'appliquer strictement cette règle; on peut toutefois y introduire une légère simplification; si

Tableau des mesures de poids.

Unité fondamentale : **gramme** (g). Ex. $25^{g},3$.

MULTIPLES

décagramme (dag) =	10^{g}	Ex. : $230^{g} = 23^{dag}$
hectogramme (hg) =	100^{g}	Ex. : $450^{g} = 4^{hg},5$
kilogramme (kg) =	$1\,000^{g}$	Ex. : $8\,300^{g} = 8^{kg},3$

On dit souvent pour abréger *hecto* et *kilo*, au lieu de hectogramme et kilogramme et l'on écrit : $4^{hg},5$; $8^{kg},3$.

MULTIPLES DU KILOGRAMME

quintal métrique (q) =	100^{kg}	Ex. : $500^{kg} = 5^{q}$
tonne (t) =	$1\,000^{kg}$	Ex. : $25\,000^{kg} = 25^{t}$

SOUS-MULTIPLES

décigramme (dg) =	$0^{g},1$	Ex. : $5^{g},6 = 56^{dg}$
centigramme (cg) =	$0^{g},01$	Ex. : $3^{g},32 = 332^{cg}$
milligramme (mg) =	$0^{g},001$	Ex. : $0^{g},02 = 20^{mg}$

MESURES EFFECTIVES

50^{kg}, 20^{kg}, 10^{kg}, 5^{kg}, 2^{kg}, 1^{kg} gros poids
500^{g}, 200^{g}, 100^{g}, 50^{g}, 20^{g}, 10^{g}, 5^{g}, 2^{g}, 1^{g} poids moyens
5^{dg}, 2^{dg}, 1^{dg}, 5^{cg}, 2^{cg}, 1^{cg}, 5^{mg}, 2^{mg}, 1^{mg} petits poids

80. **Monnaies.** — C'est par un lien assez artificiel que les monnaies sont rattachées au système métrique. Les créateurs du système ont établi que un *franc* d'argent pèserait 5^{g} et que l'or, à poids égal, vaudrait 15 fois et demi plus que l'argent[1].

---

le poids de 200^{g} est retiré du plateau, après essai, comme trop fort, on peut *sauter* le *premier* des poids de 100^{g} (qui le suit immédiatement dans la boîte) et essayer seulement le second. Cette simplification s'applique aux poids de 200^{g}, 20^{g}, 2^{g}.

1. Ce dernier fait, qui était exact à cette époque éloignée, est un *fait commercial* qui ne peut pas faire l'objet d'une *convention*

Il en résulte que 5^g d'or valent $15^{fr},50$, c'est-à-dire qu'un gramme d'or vaut $3^{fr},10$.

Il faut entendre que l'or et l'argent monnayés sont au titre de 9 dixièmes, c'est-à-dire que 1^g de monnaie renferme $0^g,9$ de métal précieux et $0^g,1$ de cuivre, destiné à augmenter la dureté. Depuis 1866 les pièces divisionnaires d'argent (de 2^{fr}, 1^{fr} et $0^{fr},50$) sont au titre de 0,835 seulement.

Les dimensions des monnaies sont indiquées par la loi ; nous faisons connaître leur diamètre dans le tableau ci-contre, où ne figurent pas les monnaies très peu usitées de 100^{fr} et de 50^{fr} en or, de 2^c et de 1^c en bronze, ni les pièces de 5^{fr} en or et de 20^c en argent qui ont été retirées de la circulation.

Remarque. — Le seul sous-multiple usité du franc est le *centime;* le *décime* ou dixième de franc, ne figure guère que dans certaines formules fiscales. Il en résulte que l'on n'écrit jamais $4^{fr},3$, qui devrait se lire 4 francs 3 décimes, ou par abréviation 4 francs 3, mais $4^{fr},30$, qui se lit 4 francs 30 (centimes, sous-entendu).

---

en fait, actuellement un gramme d'or vaut, suivant le cours de la Bourse, qui est variable, de 25 à 35 fois plus qu'un gramme d'argent. Mais les monnaies sont toujours fabriquées suivant les conventions primitives. Il en résulte que la monnaie d'or étant l'étalon international, la *monnaie d'argent* vaut *commercialement* beaucoup moins que *fiduciairement;* c'est-à-dire que si l'on fait fondre une pièce de 5 francs, on obtient un lingot qui vaut de 2 à 3 francs, suivant le cours du *métal argent.* Pour cette raison la France a suspendu la frappe de l'argent, c'est-à-dire qu'on ne fabrique plus de pièces d'argent (tout au moins, on n'en fabrique que de très petites quantités, pour remplacer les vieilles pièces usées).

Tableau des monnaies françaises usuelles.

OR

Valeur.	Poids.	Titre.	Diamètre.
20^{fr}	$6^{g},452$	0,900	21^{mm}
10^{fr}	$3^{g},226$	0,900	19^{mm}

ARGENT

Valeur.	Poids.	Titre.	Diamètre.
5^{fr}	25^{g}	0,900	37^{mm}
2^{fr}	10^{g}	0,835	27^{mm}
1^{fr}	5^{g}	0,835	23^{mm}
$0^{fr},50$	$2^{g},5$	0,835	18^{mm}

NICKEL

Valeur.	Poids.	Diamètre.
$0^{fr},25$*	5^{g}	24^{mm}
$0^{fr},10$	4^{g}	21^{mm}
$0^{fr},05$	3^{g}	19^{mm}

BRONZE (95^{g} cuivre, 4^{g} étain, 1^{g} zinc sur 100^{g})

Valeur.	Poids.	Diamètre.
$0^{fr},10$	10^{g}	30^{mm}
$0^{fr},05$	5^{g}	25^{mm}

* La pièce de $0^{fr},25$ n'est pas conforme au système métrique.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE XI

Les meilleurs exercices sur le système métrique sont des exercices *pratiques;* on doit faire effectuer aux élèves des mesures de longueur, avec le mètre en bois, avec le double-décimètre, avec la chaîne d'arpenteur, et comparer les mesures obtenues par eux. Ensuite, on leur fera évaluer les surfaces et volumes de figures géométriques simples et réelles, dont ils auront mesuré eux-mêmes les dimensions. On leur fera aussi effectuer des pesées; on pourra leur faire calculer la densité d'une bille de pierre ou d'un cube de bois dont ils auront calculé le poids et le volume, etc. Les monnaies peuvent donner lieu aussi à de petits exercices aisés à imaginer.

122. — Un bicycliste parcourt $5^{m}25$ à chaque coup de pédale; combien lui faut-il donner de coups de pédale pour parcourir 100^{km}?

123. — Une route rectiligne a 3^{km} de long et 5^{m} de large. Quelle est sa surface en hectares?

124. — On met sur la route précédente une couche de sable de 1^{mm} d'épaisseur; quel est le volume de sable?

125. — Quel est le poids d'un fil de cuivre dont la section est de 5^{mm2} et la longueur de 20^{km}? On prendra la densité du cuivre égale à 8,8.

126. — Un lac tranquille a une surface de 300^{ha}; quel poids d'eau faut-il y verser pour élever son niveau de 1^{mm}?

127. — Un tuyau de distribution d'eau a une section de 3^{cm2} et une longueur de 50^{m}; combien contient-il de litres?

128. — Une caisse de bois a pour dimensions extérieures 25^{cm}, 40^{cm}, 60^{cm}; l'épaisseur de ses parois et de son couvercle est de 15^{mm}; quel est son volume intérieur, exprimé en litres? Quelle erreur ferait-on en confondant le volume intérieur avec le volume total de la caisse?

129. — Une boîte en bois a pour dimensions extérieures 7^{cm}, 8^{cm}, 10^{cm}; l'épaisseur des parois et du couvercle est 5^{mm}. Calculer son volume intérieur, son volume total, et leur différence.

130. — Une pièce rectangulaire a 8^{m} de long et 5^{m} de large; on répand sur son parquet 1 hectolitre de liquide; quelle sera l'épaisseur de la couche supposée uniforme?

131. — Le pluviomètre [1] indique qu'il est tombé 35^{mm} d'eau; quel est le poids tombé par mètre carré?

132. — Quel est le poids de neige qui se trouve sur un toit horizontal rectangulaire de 3^{m} sur 4^{m}, sachant que l'épaisseur de la couche est 40^{cm} et que la neige, à volume égal, pèse huit fois moins que l'eau [2]?

---

1. Instrument destiné à mesurer la quantité de pluie tombée en un temps et en un lieu donnés. On l'évalue d'après l'épaisseur de la couche qu'elle formerait sur un sol imperméable, si elle ne s'écoulait pas.

2. Ce chiffre varie naturellement suivant que la neige est plus ou moins tassée.

CHAPITRE XII

GRANDEURS PROPORTIONNELLES

81. **Définition.** — *Lorsque deux grandeurs dépendent l'une de l'autre, de telle manière que, lorsque l'une d'elles devient deux, trois, quatre fois plus grande, l'autre devienne aussi deux, trois, quatre fois plus grande, on dit que ces grandeurs sont directement proportionnelles* ou simplement *proportionnelles*.

Exemples. — Éclaircissons de suite cette définition par des exemples.

Le *poids* d'une substance déterminée[1], telle que l'eau, dépend de son *volume;* si le volume devient 3 fois plus grand, le poids devient aussi 3 fois plus grand, et inversement; on dira que *le poids est proportionnel au volume*.

---

1. Quand on dit que la substance est *déterminée*, on entend que sa nature est connue, ainsi que les conditions physiques dans lesquelles on l'étudie; par exemple, la *température* doit être supposée la même; sinon le poids ne serait pas exactement proportionnel au volume.

De même *le prix* d'un terrain de nature et d'emplacement donnés *est proportionnel à sa surface.*

Le prix d'une certaine quantité de charbon *est proportionnel à son poids.*

82. **Propriété fondamentale des grandeurs proportionnelles.** — *Lorsque deux grandeurs variables sont proportionnelles, le rapport de deux états de la première grandeur est égal au rapport des deux états correspondants de la seconde.*

Quelques explications sont nécessaires au sujet de cette propriété fondamentale. Tout d'abord, l'expression d'*états correspondants* indique clairement que l'on considère, non pas deux grandeurs fixes, mais deux grandeurs dont chacune est regardée comme variable, de telle manière qu'à chaque *état* de l'une d'elles, *corresponde* un état déterminé de la seconde. Tel est le cas dans les exemples cités plus haut et dans ceux qui seront donnés tout à l'heure. De plus, il est nécessaire d'expliquer ce que l'on entend par *rapport.*

Définition. — *On appelle rapport de deux grandeurs de même espèce le nombre qui mesure la première quand on prend la seconde pour unité.* Voici, par exemple, deux règles en bois; le rapport de la première à la seconde, d'après la définition, s'obtiendra en mesurant cette première au moyen de la seconde, prise comme unité; si la première contient exactement 4 fois la seconde, ce rapport est 4; si la première contient 2 fois la seconde, plus 3 fois le quart de la seconde, le rapport est $2\frac{3}{4}$ ou $\frac{11}{4}$.

Remarque. — Pour que le rapport de deux grandeurs soit défini, il est nécessaire de savoir laquelle

est la première et laquelle est la seconde. Autrement dit, le rapport de A à B n'est pas le même que le rapport de B à A; on voit immédiatement que ce sont deux nombres dont le produit est égal à 1; on dit que ces nombres sont *inverses* l'un de l'autre.

Par exemple, si le rapport de A à B est $\frac{11}{4}$, cela veut dire que A contient 11 fois le quart de B; donc le quart de B est égal à la onzième partie de A; autrement dit, B contient 4 fois le onzième de A; la rapport de B à A est donc $\frac{4}{11}$; l'on a bien :

$$\frac{11}{4} \times \frac{4}{11} = 1.$$

Proportions. — On donne le nom de *proportion* à la formule qui exprime l'égalité de deux rapports; d'après la propriété fondamentale, le fait que deux grandeurs sont proportionnelles s'exprime par une proportion; si l'on désigne par A et A′ deux états de la première grandeur et par B et B′ les états correspondants de la seconde, la condition pour que les grandeurs soient proportionnelles est que l'on ait :

$$(1) \qquad \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}.$$

Supposons, par exemple, que la grandeur A consiste en mètres de drap et que B soit son prix; si 4 mètres coûtent 12 francs, 7 mètres coûtent 21 francs; ici $A = 4$, $A' = 7$; $B = 12$, $B' = 21$, et l'on a bien :

$$(2) \qquad \frac{4}{7} = \frac{12}{21}.$$

Remarque I. — Dans ce qui précède, pour passer de l'égalité (1) à l'égalité (2), nous avons remplacé les *grandeurs* A et A' par les *nombres* 4 et 7 qui les mesurent; le rapport $\frac{A}{A'}$, est ainsi devenu $\frac{4}{7}$; cette substitution est légitime, à la condition expresse que l'unité de mesure soit la même pour A et A'; ici c'est le mètre. Il n'aurait pas fallu, A étant égal à 3^m et A' à 50^{cm}, prendre comme rapport $\frac{3}{50}$, mais

$\frac{3}{0,5} = \frac{6}{1} = 6.$

Remarque II. — L'égalité (1) exprime la condition nécessaire et suffisante de la proportionnalité, pourvu qu'elle soit vérifiée pour *tous* les états A et A'. Considérons, par exemple, la surface B obtenue en ajoutant à une aire de 8^{m2} un carré de A mètres de côté. Si $A = 1^m$, $B = 8^{m2} + 1^{m2} = 9^{m2}$; si $A = 2^m$, $B = 8^{m2} + 4^{m2} = 12^{m2}$; si $A = 3$, $B = 8^{m2} + 9^{m2} = 17^{m2}$; si $A = 4^m$, $B = 8^{m2} + 16^{m2} = 24^{m2}$. On voit qu'aux valeurs $A = 2^m$ et $A' = 4^m$ correspondent les valeurs $B = 12^{m2}$ et $B' = 24^{m2}$; l'on a bien :

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \qquad \text{car } \frac{2}{4} = \frac{12}{24}.$$

Il ne faudrait pas en conclure que les grandeurs A et B que l'on vient de définir sont proportionnelles, car si l'on prend par exemple $A = 1^m$ et $A' = 3^m$, l'on a $B = 9^{m2}$ et $B' = 17^{m2}$; l'égalité des rapports n'est pas vérifiée, comme on s'en assure aisément.

Remarque III. — Nous ne nous attarderons pas à démontrer que la propriété fondamentale (82) est équivalente à la définition (81). Cette équivalence résultera pour l'élève réfléchi de l'étude des exemples particuliers; elle sera démontrée dans un cours plus élevé.

83. Applications. Règle de trois. — Lorsque

l'on sait que deux grandeurs sont proportionnelles, on peut se proposer, connaissant deux états de la première et l'état de la seconde qui correspond à l'un d'eux, de trouver l'état de la seconde qui correspond à l'autre. Par exemple, sachant que 3^m de drap coûtent 15^{fr}, trouver le prix de 4^m du même drap. Ce type de problème porte le nom de *règle de trois* parce que les données sont au nombre de *trois*. On peut le traiter par la méthode dite de *réduction à l'unité*, c'est-à-dire faire le raisonnement suivant :

Si 3^m de drap coûtent............... 15^{fr}

1^m coûte 3 fois moins, soit........ $\frac{15}{3}$

et 4^m coûtent 4 fois plus, soit ...... $\frac{15 \times 4}{3}$.

On arrive plus brièvement au même résultat en se servant de l'égalité fondamentale qui exprime que le prix est proportionnel au métrage. Si l'on désigne par x le prix inconnu des 4^m, on a la proportion

$$\frac{x}{15} = \frac{4}{3}$$

où l'on a eu soin d'écrire comme numérateurs des deux rapports (ou fractions[1]) les états correspondants. On en conclut, en multipliant par 15

$$x = \frac{4 \times 15}{3} = 20.$$

1. Nous laissons ici de côté la distinction entre rapports et fractions; l'usage apprendra aux élèves à manier les fractions à termes non entiers, dont la théorie leur sera faite plus tard.

On sait d'ailleurs que x est mesuré avec la même unité que le prix donné, qui était 15^{fr}; le prix demandé est donc 20^{fr}.

PROBLÈME. — *Sachant que* 2500^{kg} *de charbon coûtent* 125^{fr}, *quel est le prix de* 14^{t} ?

Désignons par x le prix cherché; nous aurons la proportion

$$\frac{x}{125} = \frac{14}{2,5}$$

où nous avons eu soin d'exprimer en tonnes les deux termes du second rapport. On en conclut

$$x \times \frac{14 \times 125}{2,5} = \frac{14 \times 250}{5} = 14 \times 50 = 700.$$

Le prix demandé est 700^{fr}.

Nous avons fait les calculs par la méthode la plus brève, en multipliant par 2, puis divisant par 5 les deux termes de la fraction à calculer. Pour les faire sans artifice, on devrait multiplier 14 par 125, ce qui donne 1750 et diviser 1750 par 2,5, ce qui donne bien 700.

84. **Grandeurs inversement proportionnelles.** — *On dit que deux grandeurs sont inversement proportionnelles lorsque, si la première devient deux, trois, quatre fois plus grande, la seconde devient deux, trois, quatre fois plus petite.* Cette définition appellerait les mêmes observations que celle des grandeurs directement proportionnelles; il est inutile de les répéter; énonçons toutefois, vu son importance, la propriété fondamentale.

85. **Propriété fondamentale.** — *Lorsque deux grandeurs sont inversement proportionnelles, le rap-*

port des états correspondants de la première est égal au rapport des états correspondants de la seconde, pris en ordre inverse.

En d'autres termes, l'on a

$$\frac{A}{A'} = \frac{B'}{B}.$$

On en déduit, en multipliant par A'B les deux membres :

$$AB = A'B'$$

c'est-à-dire que *le produit des nombres qui mesurent les états correspondants des deux grandeurs reste invariable quand ces états varient.* On exprime quelquefois le calcul que nous venons de faire en disant que, dans une proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, mais ce langage suranné tend à disparaître. Il remonte à une époque où les difficultés typographiques étaient moins aisément surmontées que maintenant et où, pour cette raison, on écrivait le plus possible les formules sur une seule ligne; on écrivait alors la proportion ci-dessus comme il suit :

$$A : A' :: B' : B$$

et on lisait A *est à* A' *comme* B' *est* à B. Les termes A et B étaient les *extrêmes*, A' et B' les *moyens;* A et B' étaient les *antécédents*, A' et B leurs *conséquents*.

86. Exemples. — I. — *La somme nécessaire pour produire un certain intérêt par an est inversement proportionnelle au taux.* Si le taux, en effet, devient double, une somme deux fois plus faible produira le même intérêt. On peut dès lors résoudre le

Problème. — *Au taux de* 4 p. 100, *une somme de* 20 000^{fr} *produit un certain revenu ; quelle somme produira le même revenu au taux de* 5 p. 100 ? — En désignant par *y* la somme cherchée, on a la

proportion

$$\frac{x}{20\,000}=\frac{4}{5}$$

où l'on a eu soin de mettre en *dénominateur* dans le second rapport le taux 5 correspondant au *numérateur* du premier. On tire de là

$$x=\frac{4\times 20\,000}{5}=\frac{80\,000}{5}=16\,000.$$

La somme demandée est $16\,000^{fr}$.

II. — *A une température donnée, le volume d'une masse d'air est inversement proportionnel à sa pression.* (Loi de Mariotte, exacte tant que la pression n'est pas trop forte.)

Problème. — *On a* 1^{m3} *d'air à la pression de* 1^{atm}; *quel sera son volume à la pression de* 5^{atm}? Soit x le volume cherché, exprimé en *litres;* on a

$$\frac{x}{1\,000}=\frac{1}{5}$$

c'est-à-dire

$$x=\frac{1\,000}{5}=200.$$

Le volume cherché est 200 litres. On remarquera que, dans la proportion fondamentale, nous avons exprimé en litres le dénominateur du premier rapport ($1^{m3}=1000^{l}$), puisque le numérateur était supposé exprimé en litres.

87. **Grandeurs proportionnelles à plusieurs autres.** — Il arrive souvent qu'une grandeur variable dépend de plusieurs autres; par exemple, le capital nécessaire pour produire un intérêt

dépend à la fois du taux, de la durée du placement et de l'intérêt que l'on veut obtenir. Si l'on connaît le taux et la durée du placement, le capital est directement proportionnel à l'intérêt à obtenir; si l'on connaît le taux et l'intérêt à obtenir, le capital est inversement proportionnel à la durée du placement; si enfin on connaît la durée du placement et l'intérêt à obtenir, le capital est inversement proportionnel au taux. Tout cela se déduit immédiatement de la formule

$$a = \frac{100\,\mathrm{I}}{it}$$

où t désigne le temps, I l'intérêt à obtenir, i le taux et a le capital. Le taux i est l'intérêt de 100^{fr}. pendant l'unité de temps, habituellement l'année, au moyen de laquelle est exprimé le temps t.

On voit que le capital a est directement proportionnel à l'intérêt I qui figure en numérateur dans la formule et inversement proportionnel au taux i et au temps t qui y figurent au dénominateur. C'est là un fait général et il est souvent plus simple d'utiliser la formule que d'introduire la notion de grandeurs proportionnelles. Cependant, dans certains cas, cette notion est commode : il est nécessaire de la préciser.

Définition. — *Lorsqu'une grandeur dépend de plusieurs autres de telle manière que, lorsqu'une seule d'entre elles varie, les autres restant fixes, elle est proportionnelle (directement ou inversement) à la grandeur variable, on dit qu'elle est proportionnelle à l'ensemble des grandeurs dont elle*

dépend, directement aux unes et inversement aux autres.

88. **Propriété fondamentale.** — *Lorsqu'une grandeur est proportionnelle à plusieurs autres, le rapport de deux de ses états est égal au produit des rapports des états correspondants des autres, le rapport étant pris pour chacune d'elles directement ou inversement, suivant que la proportionnalité est directe ou inverse.*

Exemple. — *Sachant que pendant un certain temps, un capital de* 10 000^{fr} *au taux de* 4 o/o, *produit un intérêt de* 600^{fr}, *quel capital serait nécessaire pour produire pendant le même temps au taux de* 3 p. 100 *un intérêt de* 750^{fr} ?

Soit x le capital cherché ; le capital est inversement proportionnel au taux et directement proportionnel à l'intérêt à obtenir ; on a donc :

$$\frac{x}{10\,000} = \frac{4}{3} \times \frac{750}{600}$$

d'où

$$x = \frac{10\,000 \times 4 \times 750}{3 \times 600} = \frac{10\,000 \times 250}{150} = \frac{50\,000}{3} = 16\,666,66.$$

Le capital cherché est 16 666^{fr},65. Nous avons indiqué les simplifications telles qu'on doit les faire pour calculer rapidement; il est bon de s'exercer à calculer ainsi et, en même temps, d'effectuer, à titre de vérification, le calcul complet en faisant le produit des nombres qui figurent au numérateur et le divisant par le produit des nombres qui figurent au dénominateur.

Remarque. — Lorsque l'on a des doutes sur la

question de savoir si deux grandeurs sont directement ou inversement proportionnelles, on arrive le plus souvent à les lever par la méthode de *réduction à l'unité* dont nous avons rappelé le principe. C'est surtout dans les questions simples, à résoudre de tête, comme il s'en pose souvent dans les applications, que la notion de grandeurs proportionnelles est utile ; quand les problèmes sont tant soit peu compliqués, il est plus bref et plus sûr de recourir aux formules de l'algèbre.

Exemple. — *Trois ouvriers font un travail en 8 jours; combien de jours mettraient 6 ouvriers pour faire le même travail?* On admet que ce temps est inversement proportionnel au nombre des ouvriers; celui-ci doublant, le temps devient deux fois plus petit; la réponse est donc : *il faudra 4 jours.*

89. **Remarque finale.** — Dans les questions sur les grandeurs proportionnelles, il ne faut pas perdre de vue que, sous peine d'arriver à des résultats absurdes, on doit tenir compte de ce que, *pratiquement*, la proportionnalité n'a lieu que *tant que les grandeurs considérées ne dépassent pas certaines limites.* Lorsqu'elles deviennent trop grandes ou trop petites, le résultat du calcul théorique est toujours arithmétiquement exact, mais est pratiquement faux parce que la proportionnalité ne subsiste pas ; on n'avait donc pas le droit de raisonner comme si elle subsistait.

Exemple I. — *2 ouvriers mettent 8 heures pour construire un mur; combien de temps mettraient 7 200 ouvriers pour construire le même mur?* Le résultat du calcul, facile à faire, est 8 secondes ; ce résultat est pratiquement absurde parce que, quand les ouvriers sont trop nombreux, chacun ne travaille pas aussi bien que s'il était seul ; il n'y a plus proportionnalité.

Exemple II. — *Dans un pays où le terrain vaut* 500^{fr} *l'hec-*

tare, quel est le prix d'un mètre carré? On trouve immédiatement 5 centimes; ce résultat est exact, mais il est clair qu'il ne sera pas pratiquement possible de devenir propriétaire d'un mètre carré en déboursant un sou.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE XII

133. — Sachant que 3^{ha} de terrain coûtent $4\,000^{fr}$, combien coûtent $4^{ha}\,50^{a}$ du même terrain?

134. — Sachant que 12^{m} de drap coûtent 60^{fr}, combien coûtent 18^{m} du même drap?

135. — Pour achever un travail donné, 6 ouvriers mettront 8 heures; combien de temps mettraient 8 ouvriers?

136. — Pour construire un mur de 5^{m} de longueur, 4 ouvriers ont mis 18^{h}; combien d'heures mettront 12 ouvriers pour construire un mur de 16^{m} de longueur, mais de même hauteur et de même épaisseur que le premier?

137. — On paie 15^{fr} pour 4^{m} d'une étoffe qui a $0^{m}50$ de largeur; combien devrait-on payer 6^{m} d'une étoffe de même qualité, mais de $0^{m}60$ de largeur [1] ?

138. — Pour faire un certain travail, 8 ouvriers, travaillant 10^{h} par jour, mettent 4 jours. Combien de jours mettraient 5 ouvriers travaillant 8^{h} par jour [2]?

139. — On dépense $3\,000^{fr}$ pour nourrir 50 hommes pendant 40 jours. Combien dépensera-t-on pour nourrir

---

1. Pour résoudre ce problème, on admettra qu'à qualité égale, le prix est proportionnel à la largeur; pour diverses raisons commerciales, cette condition n'est pas toujours réalisée; certaines largeurs sont plus avantageuses que d'autres.

2. On admet généralement, pour résoudre les problèmes de ce genre, que le travail fourni par un ouvrier dans un jour est proportionnel au nombre d'heures de travail. Cela est à peu près exact quand ce nombre d'heures varie peu et que l'ouvrier ne modifie pas ses habitudes. Mais l'expérience a prouvé que des ouvriers pouvaient s'habituer à faire en 8^{h} autant de travail qu'ils faisaient en 10^{h}; parce que, étant moins fatigués, ils travaillent mieux. Il est clair que si l'on faisait travailler un homme 24^{h} en un jour, il ne ferait pas 3 fois plus de travail qu'en 8^{h}.

30 hommes pendant 100 jours, si le prix des vivres a doublé ?

140. — On a sur un bateau des rations suffisantes pour nourrir 30 hommes pendant 20 jours ; pendant combien de jours pourra-t-on nourrir 40 hommes, en réduisant la ration aux deux tiers de sa valeur normale ?

141. — Une chute d'eau de 3^{m} de hauteur et d'un débit de 20^{l} à la seconde effectue un certain travail dans une usine ; on veut effectuer un travail double au moyen d'un cours d'eau dont le débit est 25^{l} à la seconde ; quelle devra être la hauteur de chute ?

142. — Une ville de 25 000 habitants consomme $20\,000^{kg}$ de viande de bœuf en un mois ? Combien en consomme en un an une ville de 40 000 habitants, sachant que 4 habitants de cette seconde ville en consomment en moyenne autant que 3 habitants de la première.

143. — Sachant qu'une poutre de 4^{m} de longueur, de 20^{cm} de largeur et de 30^{cm} de hauteur pèse 100^{kg}, on demande ce que pèsera une seconde poutre de 5^{m} de longueur, de 30^{cm} de largeur et de 40^{cm} de hauteur, sachant que 2^{m3} du bois dont est cette seconde poutre pèsent autant que 3^{m3} du bois dont est la première.

CHAPITRE XIII

METHODES COMMERCIALES DU CALCUL DE L'INTÉRÊT ET DE L'ESCOMPTE BORDEREAUX D'ESCOMPTE

---

90. **Rappel des formules fondamentales.** — L'*intérêt* I rapporté par un capital a, au taux i, pendant un temps t, est donné par la formule

(1) $$I = \frac{ait}{100}.$$

Dans cette formule le temps t est exprimé en *années*; lorsqu'il s'agit d'un certain nombre j de jours, on admet que l'année commerciale se compose de 360 jours; on a donc :

$$t = \frac{j}{360}$$

et la formule devient

(2) $$I = \frac{aij}{100 \times 360} = \frac{aij}{36\,000}.$$

Le calcul de l'*escompte* se fait par la même formule; il est bien entendu qu'il s'agit de l'*escompte commercial*, le seul usité.

91. **Méthode des nombres et des diviseurs.** — Il arrive le plus souvent, pour les taux usuels, que la formule (2) peut être simplifiée, le dénominateur 36 000 étant divisible par le taux i; elle devient alors

$$I = \frac{aj}{36\,000 : i}. \tag{3}$$

Le numérateur aj est appelé par les banquiers le *nombre;* le dénominateur $36\,000 : i$ est le *diviseur fixe*, ou simplement le *diviseur*. Il est utile de calculer d'avance les diviseurs correspondant aux taux les plus usités.

Pour le taux de	0, 50 o/o	le diviseur est	....	72 000
—	1 —	—	....	36 000
—	$1\,^1/_2$ —	—	....	24 000
—	2 —	—	....	18 000
—	$2\,^1/_2$ —	—	....	14 400
—	3 —	—	....	12 000
—	3,60 —	—	....	10 000
—	4 —	—	....	9 000
—	$4\,^1/_2$ —	—	....	8 000
—	5 —	—	....	7 200
—	6 —	—	....	6 000

La règle pratique est alors la suivante :

Règle. — Le produit du nombre de jours par le capital donne le *nombre;* l'intérêt s'obtient en divisant le *nombre* par le *diviseur*.

Exemple. — Trouver l'intérêt de 4000^{fr} à 3 o/o pendant 20 jours. Le *nombre* est $4000 \times 20 = 80\,000$,

le *diviseur* correspondant à 3 o/o est 12 000 ; on a :

$$\frac{80\,000}{12\,000} = \frac{20}{3} = 6{,}66$$

l'intérêt cherché est 6^{fr},65, en chiffres ronds.

Simplifications. — Dans la pratique, on néglige les centimes du capital ; on néglige aussi les deux derniers chiffres à droite du *nombre*, que l'on remplace par des zéros ; on peut ainsi simplifier en divisant par 100 le nombre et le diviseur.

Exemple. — Escompter un billet de 3 245^{fr},35 à 45 jours au taux de 4 o/o.

Le nombre est $3\,245 \times 45 = 146\,025$; le diviseur est 9000 ; on remplace par des zéros les deux derniers chiffres du nombre ; on a alors :

$$\frac{146\,000}{9\,000} = \frac{146}{9} = 16{,}222\ldots$$

L'escompte est 16^{fr},20, en chiffres ronds.

La valeur actuelle du billet est donc 3 245^{fr},35 — 16^{fr},20 = 3 229^{fr},15.

Ici, le calcul aurait pu se faire plus simplement encore, parce que le nombre de jours 45 est un multiple de 9. On aurait :

$$\frac{3245{,}35 \times 45}{9\,000} = 3{,}24535 \times 5 = \frac{32{,}4535}{2} = 16{,}22675.$$

Le résultat diffère extrêmement peu du résultat obtenu par la règle ; cependant, cette très petite différence conduirait, en *forçant* le chiffre des centimes qui est suivi d'un 6, à 16^{fr},23, c'est-à-dire à 16^{fr},25 en forçant encore, au lieu de 16^{fr},20. Toute méthode abrégée peut ainsi conduire, en forçant

les chiffres, à une erreur pratique de $0^{fr},05$, si petite que soit l'erreur réelle.

92. **Cas de plusieurs effets.** — La méthode des nombres est surtout avantageuse lorsque l'on a à calculer l'escompte total de plusieurs effets dont les valeurs et les échéances sont variables. On calcule alors séparément les *nombres* correspondant aux divers effets, on ajoute ces nombres et on divise la somme par le diviseur ; dans ces calculs, on utilise les simplifications précédentes.

Soit par exemple, à escompter, au taux de 5 o/o, un effet de $426^{fr},30$ payable dans 26 jours, un effet de $6\,325^{fr},45$ payable dans 35 jours, un effet de $14^{fr},50$ payable dans 90 jours et un effet de $14\,260^{fr}$ payable dans 4 jours. On adoptera, par exemple, la disposition suivante :

	MONTANT DES EFFETS	ÉCHÉANCE	CALCUL INTERMÉDIAIRE	NOMBRES
	426,30	26j	426 × 26 = 11 076	111
	6 325,45	35j	6 325 × 35 = 221 375	2 214
	14,50	90j	14 × 90 = 1 260	13
	14 260	4j	14 260 × 4 = 57 040	570
Total. . .	21 026,25			2 908
Escompte.	40,40		2 908 : 72 = 40,38	
Net. . . .	20 985,85			

Dans la première colonne se trouve inscrit le montant des effets ; on les dispose de manière à pouvoir les additionner, et l'on retranche de la somme l'escompte total ; la différence donne la somme nette à toucher. Dans la seconde colonne se trouve inscrit le nombre de jours à s'écouler d'ici l'échéance ; dans la troisième, *qui n'existe pas dans la pratique*, nous avons indiqué le calcul intermédiaire ; ce calcul se fait pra-

tiquement, soit à l'aide d'un barème, soit, à part, sur un papier brouillon. Enfin dans la dernière colonne sont inscrits les *nombres;* on a supprimé les deux derniers chiffres en forçant le précédent lorsque le nombre formé par les chiffres supprimés dépassait 50. On fait le total des nombres et on le divise par le *diviseur* 72 (le diviseur était 7 200, mais on a supprimé les deux zéros, puisque les nombres sont divisés par 100).

93. **Bordereaux d'escompte.** — On donne le nom de *bordereau d'escompte* à une pièce accompagnant les effets présentés à l'escompte et donnant l'énumération de ces effets, ainsi que les éléments essentiels du calcul de leur escompte. Un bordereau d'escompte se réduit essentiellement au tableau de la page précédente (moins la colonne *calcul intermédiaire*); mais il y figure, dans d'autres colonnes, des renseignements utiles : nom de la personne qui doit payer l'effet, lieu et date du payement. D'autres colonnes peuvent être prévues pour le calcul des *commissions* ou *courtages*, autres que l'escompte, qui sont souvent prélevés pour frais d'encaissement.

Ces courtages sont habituellement proportionnels au montant de l'effet, avec toutefois un certain minimum; leur taux, variable avec le *lieu* de l'échéance, est inscrit dans une colonne spéciale et leur montant dans une colonne voisine. Ce montant se calcule par une simple multiplication : par exemple, pour calculer une commission de $0^{fr},20$ pour 100^{fr} sur un effet de $4\,326^{fr},45$, on observe que la commission est de 2^{fr} pour 1000^{fr}; il suffit donc de multiplier 4,326,45 par 2; on néglige naturellement les deux derniers chiffres et on arrondit le

précédent ; on multiplie donc 4,325 par 2, ce qui donne 8fr,65.

On doit naturellement retrancher du total des montants des effets la somme de l'escompte et de la commission.

Nous ne pouvons naturellement entrer ici dans des détails qui s'apprennent par la pratique ; dans certains cas, on écrit dans la colonne des escomptes le montant de l'escompte et dans certains cas seulement le *nombre;* la Banque de France exige que, sur les bordereaux d'escompte qui lui sont remis, se trouve l'indication de ses succursales, dans une colonne spéciale, etc.

94. **Cas des taux compliqués.** — *Méthode du soixante.* — La méthode du *diviseur* et du *nombre*, que nous avons exposée, est la plus simple lorsque le *diviseur* est lui-même un nombre simple, ce qui a lieu pour les taux usuels; il arrive parfois que l'on a à calculer un intérêt ou un escompte pour un taux qui donnerait un diviseur compliqué; par exemple, le taux de 3 1/2 0/0 donne le diviseur 10 285,71 ; même en négligeant les centièmes, on aurait ainsi des calculs trop longs. Il est alors plus commode de faire le calcul comme si le taux était 6 0/0, dont le diviseur 6000 (ou 60 quand on le divise par 100 comme les *nombres*, d'où le nom de *méthode du soixante*) donne des calculs particulièrement simples. Une fois l'intérêt calculé au taux de 6 0/0, on le ramène au taux réel en s'appuyant sur le fait que l'intérêt est proportionnel au taux; la méthode la plus simple pour cela est celle des *parties aliquotes du taux* que nous allons exposer sur un exemple.

EXEMPLE. — *Trouver l'intérêt de* 3 265^fr *en* 24 *jours à* 3 1/2 o/o.

A 6 o/o l'intérêt est :

$$\frac{3\,265 \times 24}{6\,000} = 3{,}265 \times 4 = 13{,}06.$$

On fera le calcul suivant :

L'intérêt à	6 %	est	13,06
—	3	— serait deux fois plus petit soit	6,53
—	1/2	— serait 6 fois plus petit qu'à 3 % soit	1,09
—	3 1/2	— est la somme des intérêts à 3 % et à 1/2 %.	7,62

L'intérêt demandé est 7^fr,60.

AUTRE EXEMPLE. — *Calculer l'intérêt de la même somme dans le même temps à* 2 3/4 o/o.

L'intérêt à	6 o/o	est	13,06
—	2	— est le tiers, soit	4,35
—	3/4	— est le huitième de 6 % soit	1,63
—	2 3/4	— est la somme	5,98

L'intérêt demandé est 6^fr.

95. **Simplifications.** — Dans certains cas, la méthode du soixante, c'est-à-dire le calcul de l'intérêt à 6 o/o, peut être simplifiée par quelques remarques. Cet intérêt I est donné par la formule :

$$I = \frac{aj}{6\,000}$$

où a est le capital et j le nombre de jours; si l'on a $j = 60$, cette formule donne :

$$I = \frac{a}{100}$$

c'est-à-dire que l'intérêt à 6 o/o pendant 60 jours est le centième du capital. Connaissant l'intérêt pendant 60 jours, on peut calculer l'intérêt pendant un nombre quelconque de jours par la *méthode des parties aliquotes du temps* que nous allons exposer sur un exemple. Cette méthode est basée sur ce que 60 a un grand nombre de diviseurs (ou *parties aliquotes*) : 60, 30, 20, 15, 12, 10, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Dès lors, un nombre quelconque peut être décomposé en une somme de quelques-uns de ces diviseurs ; on y arrive très vite avec quelque habitude.

EXEMPLE. — *Calculer l'intérêt à* 6 o/o *de* 3 245f *pendant* 53 *jours.*

L'intérêt pendant	60 jours		est le centième du capital.	32,45
—	30	—	est la moitié de 32,45....	16,22
—	20	—	est le tiers de 32,45.. ...	10,82
—	3	—	est le dixième de 16,22...	1,62
L'intérêt pendant	53	—	est la somme............	28,66

L'intérêt demandé est 28fr,65.

AUTRE EXEMPLE. — *Calculer l'intérêt à* 6 o/o *de* 8 432fr *pendant* 87 *jours.*

L'intérêt pendant	60 jours		est le centième du capital.	84,32
—	20	—	est le tiers de 84,32.....	28,11
—	6	—	est le dixième de 84,32...	8,43
—	1	—	est le vingtième de 28,11.	1,40
—	87	—	est la somme...........	122,26

L'intérêt demandé est 122fr,25.

On peut aussi employer la méthode des parties aliquotes du temps avec les taux de 2 o/o, 3 o/o, 4 o/o, 4 1/2 o/o, dont les *diviseurs* 180, 120, 90,

80 ont aussi beaucoup de parties aliquotes. Ces diviseurs prennent alors le nom de *bases;* c'est le nombre de jours au bout desquels l'intérêt est égal au centième du capital.

Exemple. — *Calculer l'intérêt de* 875fr *à* 4 1/2 o/o *pendant* 87 *jours.*

La base est ici 80, quotient de 360 par 4,5. On dira :

L'intérêt pendant	80 jours	est le centième du capital..		8,75
—	4	—	est le vingtième de 8,75...	0,44
—	2	—	est la moitié de 0,44......	0,22
—	1	—	— 0,22......	0,11
—	87	—	est la somme.............	9,52

L'intérêt demandé est 9fr,50.

Naturellement dans la pratique, on n'écrira pas toutes les explications. On adoptera, par exemple, la disposition suivante :

Exemple. — *Calculer l'intérêt de* 2 433fr *à* 4 p. 100 *pendant* 68 *jours.* — L'intérêt demandé est 18fr,38 suivant le calcul ci-contre.

90 j.......	24,33
30 j.......	8,11
30 j.......	8,11
6 j.......	1,62
2 j.......	0,54
68 j.......	18,38

EXERCICES SUR LE CHAPITRE XIII

144. — Calculer l'intérêt de 4 875fr pendant 13 jours à 6 o/o.

145. — Calculer l'intérêt de la même somme pendant le même temps à 3 3/4 o/o.

146. — Calculer l'intérêt de 8 756fr pendant 27 jours à 4 o/o.

147. — Calculer l'intérêt de 2 375^{fr},35 pendant 16 jours à 3 1/2 o/o.

148. — Calculer l'intérêt de 4 875^{fr},50 pendant 17 jours à 5 o/o.

149. — On présente à l'escompte 3 effets, l'un de 2 346^{fr},35 qui échoit dans 45 jours, le second de 4 783^{fr} qui échoit dans 35 jours et le troisième de 8 756^{fr},40 qui échoit dans 28 jours. Quelle est la somme totale à recevoir, sachant que le taux de l'escompte est 4 o/o et la commission du banquier de 0^{fr},15 o/o?

150. — On présente à l'escompte le 15 mai un effet de 7 326^{fr},30 échéant le 5 juin, un effet de 4 653^{fr},40 échéant le 15 juin et un effet de 975^{fr},60 échéant le 31 juillet. Quelle est la somme totale à recevoir, le taux de l'escompte étant 3 o/o et la commission 1^{fr},25 o/oo (pour mille)?

151. — Quel est l'intérêt de 35 243^{fr} pendant 37 jours, au taux de 1 7/8 o/o?

152. — Une somme de 43 257^{fr} est placée pendant 12 jours au taux de 2 o/o, pendant 25 jours au taux de 2 1/2 o/o et pendant 37 jours au taux de 2 1/4 o/o. Quel est l'intérêt total produit?

153. — On place au taux de 3/4 o/o une somme de 25 000^{fr} pendant 12 jours, une somme de 48 000^{fr} pendant 17 jours et une somme de 55 240^{fr} pendant 19 jours. Quel est l'intérêt total produit?

154. — Quelle est la valeur actuelle d'un effet de 8 324^{fr},50 payable dans 83 jours, le taux de l'escompte étant 3 1/2 o/o? Quelle serait sa valeur si le taux de l'escompte était 5 1/2 o/o?

CHAPITRE XIV

COMPTES COURANTS.
NOTIONS SOMMAIRES SUR LES VALEURS

---

96. **Définition du compte courant.** — On dit que deux personnes sont en *compte courant* lorsque, faisant fréquemment des opérations de commerce ou de banque l'une avec l'autre (ventes de marchandises, remises d'effets à escompter, ou de coupons à encaisser, versements de fonds, etc.), elles conviennent, au lieu de régler chaque opération individuellement, *d'inscrire toutes les dettes et créances auxquelles ces opérations donnent lieu et de ne régler qu'à des époques fixées d'avance* (généralement fins de trimestre, de semestre ou d'année). Nous n'avons pas à exposer ici la théorie juridique du compte courant ; le point le plus important en est *la novation de créance*, c'est-à-dire que l'origine primitive de la dette disparaît, ainsi que les droits particuliers qui pouvaient résulter de la nature de cette dette, et toutes les sommes inscrites dans le compte sont soumises aux mêmes lois.

Un compte courant comprend deux parties, ou deux colonnes, le *Doit* et l'*Avoir*. Dans la colonne *Doit*, celui qui tient le compte inscrit les sommes qui lui sont *dues* par le titulaire du compte ; dans la colonne *Avoir*, les sommes qu'il *a* reçues de ce titulaire. Il est clair que, si le titulaire du compte tient chez lui un compte courant, les deux comptes sont *réciproques*, c'est-à-dire que l'*Avoir* de l'un est le *Doit* de l'autre et inversement.

On aura, par exemple, la disposition suivante ; dans un registre de la banque Pierre, on lira :

Doit *Jacques, son compte courant* **Avoir**

Avril	15	Son chèque n° 3 425 . .	420 »	Mai	31	Remise sur Durand . .	1 403 75
Mai	17	Son chèque n° 3 426 . .	37 50	Juin	14	Coupons de rentes sur l'État . .	210 »
Mai	31	Escompte de la remise Durand . .	8 75				
		Commission.	3 75				

tandis que dans le registre de la maison Jacques, on lira :

Doit *Pierre, son compte courant* **Avoir**

Mai	31	Remise sur Durand . .	1 403 75	Avril	15	Chèque n° 3 425.	420 »
Juin	14	Coupons de rentes. . .	210 »	Mai	17	Chèque n° 3 426.	37 50
				Mai	31	Escompte de la remise Durand.	8 75
						Commission de la remise Durand	3 75

Il est clair que, pour *régler* un compte courant, il suffit de faire la somme du *Doit*, la somme de l'*Avoir* et de retrancher la plus petite somme de la plus grande ; la différence est le *solde ;* si le *Doit* dépasse l'*Avoir*, le solde est *débiteur ;* si l'*Avoir* dépasse le *Doit*, le solde est *créditeur*. Si le solde n'est pas réglé, il est *reporté à nouveau*, dans la colonne du *Doit* ou *Débit* s'il est débiteur, dans la colonne de l'*Avoir* ou *Crédit* s'il est créditeur. Si le solde du compte de Pierre chez Jacques est *débiteur*, Pierre est *débiteur* de Jacques ; il *doit* lui verser une somme égale au solde.

97. **Comptes courants et d'intérêts.** — On convient souvent que les sommes dues l'une à l'autre par les deux personnes en compte courant sont productives d'intérêt. Le compte est alors *un compte-courant et d'intérêts ;* nous supposerons que le taux de l'intérêt est fixé une fois pour toutes et est le même, quel que soit le débiteur [1]. Il faut alors, pour arrêter le compte, tenir compte des intérêts dus par chacune des parties à l'autre. Pour faire ce calcul, on peut employer plusieurs méthodes, que nous allons exposer ; dans chaque méthode, on peut, soit inscrire directement les intérêts dans le compte, soit inscrire seulement les *nombres* (voir n° 92) et

1. Souvent les comptes des particuliers chez les banquiers sont à *taux non réciproque*, c'est-à-dire que le banquier, quand il est créditeur du particulier, exige un intérêt plus élevé que celui qu'il paye quand il est débiteur ; souvent aussi le taux varie en même temps que celui de l'escompte de la Banque de France (dont la valeur est tous les jours dans les journaux). Nous n'entrerons pas dans les détails de ces particularités, auquelles s'applique la *méthode hambourgeoise*, que nous allons exposer d'abord, à l'exclusion des autres.

faire le calcul des intérêts correspondant à l'ensemble des nombres au moment d'arrêter le compte.

98. **Méthode hambourgeoise**[1]. — Cette méthode n'est pas la plus brève, mais c'est celle qui se présente le plus naturellement à l'esprit et qui peut, par suite, éviter le plus d'erreurs aux personnes inexpérimentées.

Elle consiste à calculer, à chaque opération, le solde débiteur ou créditeur du compte, et à calculer l'intérêt correspondant depuis la date de cette opération jusqu'à la date de la suivante[2].

Suivant que le solde est créditeur ou débiteur, on inscrit l'intérêt dans la colonne des intérêts créditeurs ou dans celle des intérêts débiteurs. On calcule ensuite le solde des intérêts en même temps que le solde du capital. Il faut observer que, pour mettre en évidence ce solde, on l'inscrit habituellement dans la colonne du *crédit* si c'est un solde *débiteur* et inversement ; les totaux des deux colonnes doivent alors être égaux, on agit de même pour les nombres. Les écritures présentent alors l'aspect ci-après (p. 205) ; nous avons supprimé, pour abréger, l'indication de la nature des opérations ;

---

1. Nous exposerons seulement la méthode hambourgeoise nouvelle, où les intérêts sont capitalisés à chaque règlement de compte. La méthode hambourgeoise ancienne, où les intérêts sont capitalisés à chaque opération, n'est pas usitée ; elle n'est d'ailleurs pas légale.

2. Lorsque l'on parle de la date d'une opération, il s'agit, bien entendu, de la date inscrite dans le compte ; cette date suivant les conventions faites, ne coïncide pas toujours avec la date réelle. Par exemple, si l'on remet des espèces à une banque le 15 juin, on en est *crédité* à la date du 16 ; si l'on remet le même jour un effet à encaisser payable à vue, on en est crédité à la date du 20, ou du 25, suivant le lieu de payement.

leur montant a seul de l'importance. Des calculs auxiliaires montrent que du 31 décembre au 12 février le solde débiteur est 300^{fr}; le *nombre* correspondant à cet intervalle de 43 jours est $300 \times 42 = 12\,900$; on le divise par 100 et on inscrit 129; de même du 12 février au 1er mai, soit pendant 78 jours[1], le solde débiteur est 800^{fr}; le nombre correspondant est $8 \times 78 = 624$, que l'on inscrit dans la colonne des nombres débiteurs. Du 1er au 3 mai, soit pendant 2 jours, le solde débiteur est 1800^{fr}; le nombre est 36; du 3 mai au 2 juin, soit pendant 30 jours, le solde débiteur est 800^{fr}; le nombre est 240; du 2 au 30 juin, soit pendant 28 jours, le solde créditeur est 400^{fr}, le nombre, ici créditeur est 112. Le solde du capital est 400^{fr}; il est créditeur, c'est-à-dire sera reporté dans la colonne de l'avoir; le solde des nombres est *débiteur* car les intérêts des sommes *dues* sont supérieurs aux intérêts des sommes reçues; ces intérêts *dus* s'obtiennent en divisant le solde des nombres[2] 917 par le *diviseur* 180 qui correspond à l'intérêt convenu de 2 p. 100, la somme ainsi obtenue, 5^{fr},10, à laquelle on donne souvent le nom d'*agio*, doit être retranchée du solde créditeur, qui est ensuite reporté à nouveau pour le semestre suivant.

1. Pour compter cet intervalle de jours, le plus court est d'observer que février ayant 28 jours, le 1er mars serait le 29 février, le 2 mars serait le 30 février et le n mars est le $28 + n$ février; de même le n avril serait le $28 + 31 + n$ février et le n mai, le $28 + 31 + 30 + n$ février; le 1er mai serait donc le 90 février et du 12 au 90 il y a 78 jours.

2. Ce solde des nombres s'obtient, comme celui des capitaux, par la condition que les totaux de la *balance* soient égaux; il est débiteur lorsqu'il est inscrit dans la colonne du crédit, et inversement.

Doit **Avoir**

		NOMBRES			NOMBRES
Décembre 31 Solde débiteur . .	300				
Février 12	500	129			
Mai 1	1 000	624	Mai 3	1 000	
		36	Juin 2	1 200	
		240			112
Solde créditeur	400		Solde des nombres.		917
Balance.	2 200	1 029	Balance . .	2 200	1 029

Solde créditeur.	400
Agio 2 p. 100 sur les nombres	5,10
Solde créditeur à nouveau	394,90

			Juin 30 Solde créditeur . .	394,90	

L'un des inconvénients de la méthode hambourgeoise, c'est qu'elle exige que les opérations soient inscrites en ordre d'après la date où elles sont productives d'intérêt, et cette date différant souvent de la date réelle, on se trouve amené à faire deux fois les écritures pour peu qu'elles soient nombreuses, si l'on veut y voir clair.

99. **Principe des méthodes simplifiées.** — Les méthodes les plus simples consistent à calculer l'intérêt de toutes les sommes depuis la date commerciale de l'opération jusqu'à une date fixe,

appelée *époque*. Il importe seulement de préciser l'époque et d'avoir soin de remarquer que les intérêts sont additifs ou soustractifs suivant que l'époque est postérieure ou antérieure à la date de l'opération. Nous supposerons d'abord pour simplifier que l'*époque* est la date choisie pour le règlement, par exemple le 30 juin. Mais on peut avoir déjà inscrit à cette date des opérations dont la date commerciale est postérieure au 30 juin; par exemple on a remis le 15 juin un billet dont l'échéance est le 15 juillet. Il est clair que pour avoir la valeur de ce billet au 30 juin, il faut déduire les intérêts de 15 jours au lieu de les ajouter. On donne le nom d'*intérêts rouges* aux intérêts qui doivent être ainsi soustraits, parce qu'on les inscrit habituellement à l'encre rouge. Si ces intérêts rouges sont relatifs à des sommes du *crédit*, ils sont en réalité débiteurs, et inversement; c'est-à-dire que les intérêts rouges inscrits au *Doit* sont équivalents à des intérêts *noirs* inscrits à l'*Avoir*, et inversement.

Voici la disposition que présentera un compte; nous inscrivons les *nombres* au lieu des intérêts; les *nombres rouges* sont figurés par des caractères gras.

On inscrit dans une colonne spéciale le nombre de jours qui sépare la date de l'opération du 30 juin, en ayant soin d'employer des chiffres rouges si la date est postérieure au 30 juin. Les nombres de jours inscrits en rouge produisent des intérêts rouges, c'est-à-dire qui sont créditeurs s'ils sont inscrits au Doit et débiteurs s'ils sont inscrits à l'Avoir. On s'en rend compte de suite en exami-

Compte arrêté au 30 juin époque.

Doit — **Avoir**

		JOURS	NOMBRES				JOURS	NOMBRES	
1er juin	350	29	101		5 juin.	500	25	125	
15 juillet.	500	15		75	10 juillet.	470	10		47
20 juin.	1 000	10	100		20 juillet.	4 000	20		800
20 juillet.	400	20		80	25 juin.	160	5	8	
25 juin.	540	5	27			5 130		133	847
	2 790		228	155					
Solde des capitaux.	2 340								
	5 130								

nant une opération ; si nous supposons que le compte précédent est le compte de Pierre dans une banque, nous voyons que Pierre *doit* 500fr que la banque payera pour lui au 15 juillet ; si le compte est réglé au 30 juin, Pierre *a à recevoir* de la banque les intérêts de cette somme du 30 juin au 15 juillet ; ces intérêts devraient donc être inscrits à son *avoir ;* mais il est plus commode de les inscrire à côté de la somme de 500fr qui les produit et qui figure au *doit ;* on les y inscrit à l'*encre rouge.*

Pour plus de clarté, nous avons séparé les colonnes des *nombres* noirs et des *nombres* rouges ; pour faire la *balance des nombres*, on procédera comme il suit :

Les intérêts dus par Pierre à la banque comprennent :

la somme des *nombres noirs* du **Doit**..............	228
la somme des *nombres rouges* de l'**Avoir**...........	847
soit :....................................	1 075

De même, les intérêts dus par la banque à Pierre comprennent

la somme des *nombres noirs* de l'**Avoir**............	133
la somme des *nombres rouges* du **Doit**.............	155
soit :..................................	288

Donc Pierre *doit* à la banque les intérêts correspondant à la différence 1075 — 288 = 787; si le taux est 3 o/o auquel correspond le *diviseur* 120, le montant de ces intérêts est 787 : 120 = 6fr,55. On devra le déduire du solde *créditeur* des capitaux 2340fr, de sorte que, au 30 juin, le solde créditeur de Pierre est 2333fr,45.

100. **Changement de la date de clôture du compte. Méthode indirecte.** — Il est clair que si, au lieu de régler le compte précédent au 30 juin on voulait le régler au 15 juillet, il faudrait ajouter au crédit de Pierre l'intérêt de son solde créditeur 2340fr du 30 juin au 15 juillet. (Il faut bien remarquer que l'on doit prendre ici le solde des capitaux, car on ne doit pas calculer les intérêts des intérêts.) Le nombre correspondant est 23,4 × 15 = 351, de sorte que le solde débiteur des nombres est ramené à 787 — 351 = 436, auquel correspond avec le diviseur 120 un intérêt de 436 : 120 = 3,65. On donne le nom de *méthode indirecte* à la méthode qui consiste à prendre pour époque la date d'ouverture du compte, et non pas sa date de clôture. Cette méthode s'emploie surtout lorsque la date de clôture n'est pas connue d'avance; on calcule alors tous les intérêts par rapport à la date d'ouverture et l'on tient compte ensuite de l'intérêt du solde depuis la date d'ou-

verture jusqu'à la date de clôture. Cette méthode revient en réalité à *escompter* les sommes du *Doit* et de l'*Avoir* de manière à ramener la date de toutes les opérations à la date d'ouverture du compte. Si les opérations sont toutes postérieures à la date d'ouverture du compte, tous les intérêts à inscrire seraient, d'après la convention expliquée plus haut, des *intérêts rouges*, les opérations antérieures à la date d'ouverture produisant seules des intérêts noirs. Aussi, lorsque l'on emploie la méthode indirecte, on fait généralement la convention contraire, c'est-à-dire que l'on inscrit à l'encre noire les intérêts correspondant aux opérations postérieures à l'ouverture du compte et en rouge les intérêts correspondant aux opérations antérieures, s'il y en a. Comme généralement il n'y en a pas, *la méthode indirecte présente l'avantage de supprimer presque toujours les intérêts rouges.*

On pourrait croire que l'emploi de conventions opposées peut conduire à des erreurs; mais il ne faut pas perdre de vue que, dans une maison déterminée, on emploie des méthodes fixes et invariables; c'est seulement quand un employé passe d'une maison dans une autre qu'il doit se rendre compte si les procédés usités sont bien les mêmes.

101. **Notions sur les valeurs.** — On donne le nom de *valeurs mobilières* ou simplement de *valeurs*, à des morceaux de papier imprimés qui représentent une créance ou un droit de propriété; une de leurs caractéristiques est qu'il y a un grand nombre de valeurs de même nature, ne différant entre elles que par le numéro d'ordre. Chacune d'elles peut être *nominative*, c'est-à-dire porter l'inscription du

nom de son propriétaire, ou *au porteur*, c'est-à-dire ne porter aucune inscription de ce genre. Sauf preuve du contraire, les valeurs au porteur sont censées appartenir à celui qui les détient; leur *négociation*, c'est-à-dire leur achat ou leur vente, est donc plus aisée que celle des valeurs *nominatives*, qui exige des écritures assez compliquées.

La négociation des *valeurs* se fait dans des locaux appelés *Bourses des valeurs* ou simplement *Bourses;* il en existe dans les grandes villes ; mais, en France, la Bourse de Paris est de beaucoup la plus importante. Les négociations se font par l'intermédiaire d'*agents de change*, dont le nombre est limité et dont les droits, les privilèges et les obligations sont fixés par la loi. Le *cours* des valeurs, c'est-à-dire le prix de vente ou d'achat, dépend, comme celui des marchandises, de la loi de l'offre et de la demande. Le *cours moyen* du jour est constaté officiellement, pour chaque valeur, par le Syndicat des agents de change. Sa fixation a une grande importance parce que, la plupart du temps, les personnes qui ne *spéculent* pas, c'est-à-dire qui achètent les valeurs comme placement stable et non pas pour bénéficier des mouvements de hausse, *conviennent que leur négociation se fera au cours moyen*. Les négociations au cours moyen se font avant l'ouverture de la Bourse.

Les principales espèces de valeurs sont les rentes sur l'État, les actions et les obligations.

102. **Rentes sur l'État.** — La rente sur l'État français ou sur un État étranger est la reconnaissance d'une créance par cet État. Les rentes sont généralement *perpétuelles*, c'est-à-dire que le créan-

cier ne peut pas demander le remboursement de sa dette à l'État débiteur, qui lui doit seulement l'intérêt convenu. La rente a toutefois un *montant nominal*, sur lequel l'intérêt est calculé. Suivant le taux de cet intérêt, la rente est dite 6 o/o, 5 o/o, 4 o/o, 3 1/2 o/o, 3 o/o, 2 3/4 o/o, etc. L'État se réserve le droit d'offrir le remboursement au taux nominal aux porteurs qui n'accepteraient pas une certaine diminution d'intérêt; cette opération s'appelle une *conversion*. C'est ainsi que la rente française 5 o/o, émise en 1872, a été convertie successivement en 4 1/2 o/o, 3 1/2 o/o, 3 o/o. Il est clair que l'État ne peut proposer avec succès une conversion, que si le cours de la Bourse dépasse le montant nominal, c'est-à-dire dépasse *le pair*.

Les rentes sont *cotées* sur 100^fr^ de valeur nominale; c'est là l'unité choisie; ainsi, lorsque l'on voit dans un journal que le cours du 3 o/o français est 98^fr^,75, cela veut dire que le titre qui a une valeur nominale de 100^fr^, vaut en Bourse 98^fr^,75; ce titre rapporte 3^fr^ de rente, puisque la rente est 3 o/o. D'après cela, il est facile de calculer le prix d'une *coupure* de 20^fr^ de rente. Par une règle de trois, on trouve que ce prix est :

$$\frac{98{,}75 \times 20}{3} = \frac{1\,975}{3} = 658{,}333\ldots$$

Ce prix est 658^fr^,35. Il s'y ajoute des frais accessoires de courtage, impôt, etc., dans le détail desquels nous n'avons pas à entrer. Ces frais sont réduits au minimum, pour les rentes sur l'État, lorsque l'on s'adresse à une caisse publique (trésorerie générale ou recette particulière des finances).

Le paiement des intérêts des rentes se fait trimestriellement, à des époques fixées d'avance. Pour les rentes au porteur, ce payement est fait sur présentation d'un *coupon*, ou petit rectangle de papier qu'on détache du titre de rente; lorsque les coupons adhérents au titre sont épuisés, la portion restante ou *souche* est remplacée sans frais par un titre neuf, muni de nouveaux coupons. Pour les rentes nominatives, le payement de l'intérêt se constate par l'apposition d'un cachet dans une case réservée à cet effet au verso du titre. Certaines rentes, quoique nominatives, sont munies de coupons comme les rentes au porteur; elles sont dites *mixtes*.

103. **Actions**. — Une *action* est une part dans la propriété d'une entreprise commerciale ou industrielle; son revenu dépend de la prospérité de l'entreprise et est fixé chaque année par le *Conseil d'administration;* il porte le nom de *dividende;* le payement des dividendes se constate comme celui des intérêts; mais les coupons des actions au porteur portent simplement un numéro d'ordre, la somme à payer dépendant de la marche de l'entreprise. Il peut même arriver que, certaines années, il n'y ait pas de dividende.

Lorsqu'une entreprise est prospère, il arrive souvent que l'on rembourse aux actionnaires la valeur nominale de l'action; on leur remet alors un titre appelé *action de jouissance*, qui rapporte un dividende comme l'action ordinaire, mais diminué de l'intérêt de la valeur nominale remboursée.

104. **Obligations**. — Une *obligation* est la reconnaissance d'une dette d'une société. Elle a un revenu

fixe, comme les rentes sur l'État. Sa valeur nominale est le plus souvent 500fr.

En général, les Sociétés par actions émettent des obligations; les bénéfices bruts de l'entreprise servent tout d'abord à payer l'intérêt des obligations; on paie, ensuite, aux actionnaires l'intérêt du capital nominal des actions; ce qui reste après ces paiements constitue le bénéfice net, qui est distribué aux actionnaires (après prélèvement, s'il y a lieu, d'un tant pour cent pour les membres du Conseil d'administration, pour les parts de fondateur, etc.).

Le revenu des obligations est fixe, tandis que celui des actions peut augmenter indéfiniment si l'entreprise est prospère; mais, par contre, les obligations constituent un placement plus sûr; si l'entreprise réussit médiocrement, les *obligataires* touchent leur revenu, et les *actionnaires* ne touchent rien. Enfin, si l'entreprise ne réussit pas du tout et est *liquidée*, on commence par distribuer l'actif, s'il y en a, aux obligataires et c'est seulement quand ils sont désintéressés que les actionnaires peuvent se partager le restant.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE XIV

155. — Le solde créditeur du compte de Pierre à la banque Jacques s'élève à 2 355fr,75 au 31 décembre. Pierre fait un versement de 2 300fr le 17 janvier, retire 6 000fr le 8 février, remet un effet de 3 500fr échéant le 15 mars, un effet de 875fr échéant le 15 avril, verse 2 500fr le 17 mai, retire 8 000fr le 14 juin, remet un effet de 600fr échéant le 15 juillet et un effet de 3 000fr échéant le 31 juillet. Arrêter

le compte de Pierre au 30 juin en employant la méthode directe et calculant les intérêts à 3 o/o.

156. — Employer pour le compte précédent la méthode indirecte et l'arrêter 1° au 30 juin, le taux étant 3 o/o; 2° au 31 mai, le taux étant toujours 3 o/o; 3° au 15 juillet, le taux étant 2 o/o.

157. — Arrêter le compte précédent au 31 juillet en employant la méthode hambourgeoise, le taux étant 3 o/o.

158. — Même question, en supposant que le taux soit 4 o/o lorsque Pierre est débiteur et 2 o/o lorsqu'il est créditeur.

159. — Même question, en supposant que le taux soit constamment 1 1/2 o/o lorsque Pierre est créditeur, tandis que, pour Pierre débiteur, le taux est 3 1/2 o/o du 1er janvier au 20 février, 4 o/o du 21 février au 20 juin et 4 1/2 o/o du 20 juin au 31 juillet.

160. — Le cours de la rente française 3 o/o étant 98fr,75, combien coûteront 50fr de rente, sans tenir compte du courtage et de l'impôt sur les opérations de Bourse?

161. — Le cours de la rente allemande 3 o/o étant 92,75 et le mark valant, au jour de l'achat, 1fr,23, combien coûteront 100 marks de rente? On admettra que le banquier auquel on s'adresse prélève 2 o/oo (2fr pour 1 000fr) pour courtage, commission et frais.

162. — Une action du capital nominal de 500fr n'est libérée que de 250fr, c'est-à dire qu'un versement de 250fr seulement a été fait, et que les 250fr restants peuvent être *appelés* par le Conseil d'administration, s'il les juge nécessaires à la marche de l'entreprise. Le cours étant 875fr, combien devra-t-on verser pour acheter 10 actions? On tiendra compte du fait que les 250fr non versés doivent être déduits du cours, et on calculera sur le prix réel ainsi obtenu le courtage 1 o/oo de l'agent de change et l'impôt 0,05 o/oo sur les opérations de bourse.

163. — Les coupons de la rente française 3 o/o échoient les 1er janvier, avril, juillet et octobre. Ils sont *détachés* du titre le 16 du mois précédant leur échéance; mais, avant cette date, l'acheteur a droit au coupon du trimestre courant; il bénéficie donc de l'intérêt depuis la date du coupon précédent jusqu'à la date de son achat. Calculer le montant de cet

intérêt pour un acheteur au 14 novembre de 500^{fr} de rente 3 o/o.

164. — On achète le 10 décembre 10 000^{fr} de rente 3 o/o au cours de 98^{fr},45 et on les revend le 17 décembre, *coupon détaché*, au cours de 98^{fr},25. Quel est le bénéfice, en ne tenant pas compte du courtage et de l'impôt?

165. — A combien se réduit le bénéfice de l'exercice précédent en tenant compte du courtage et de l'impôt en admettant que le courtage indiqué à l'exercice 162 se prélève sur le vendeur et sur l'achetenr et que l'impôt, réduit de moitié sur la rente, ne soit payé que par l'acheteur [1].

---

1. Les indications sur les taux de courtage et d'impôt sont données simplement pour fixer les idées, car les détails d'organisation de la Bourse et surtout de l'impôt sur les opérations sont fréquemment modifiés.

EXERCICES DE RÉCAPITULATION

166. — On considère une période de 400 ans du calendrier grégorien, par exemple, du 1er janvier 1601 au 31 décembre 2000; vérifier que le nombre de jours de cette période est un multiple de 7. Quelle conséquence peut-on en tirer?

167. — Combien de fois le 1er janvier est-il un dimanche dans la période de l'exercice précédent? Combien de fois le 14 juillet est-il un jeudi?

168. — Ranger par ordre de grandeur toutes les fractions irréductibles inférieures à l'unité et dont le dénominateur est inférieur à 10.

169. — Quel est le poids d'air contenu dans une salle de 3^{m},50 de hauteur, 6^{m},75 de long et 4^{m},35 de large. On sait que le poids d'un litre d'air est 1^{g},293, dans les conditions normales de température et de pression.

170. — Calculer la valeur réelle d'une feuille d'or pur ayant 2^{m},20 de long, 1^{m},35 de large et un dixième de millimètre d'épaisseur; le poids d'un centimètre cube d'or est 19^{g},26 et un kilogramme d'or vaut 3 444^{fr},444.

171. — On forme plusieurs nombres avec les chiffres, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, employés tous une fois et seulement une fois. Peut-on former ainsi des nombres dont la somme soit égale à 999? à 1000? à 1001?

172. — Les roues de devant d'une locomotive ont 54^{cm} de diamètre et les paires de roues d'arrière 1^{m},04; les roues des wagons du train auquel elle est attelée ont 86^{cm} de diamètre. Après combien de tours ces roues ont-elles toutes repris la même position?

173. — Deux rues se traversent mutuellement en se coupant à angle droit. La longueur totale de l'une est 500^{m}, sa largeur totale 20^{m}, et la largeur de chacun de ses trottoirs, 3^{m}; la longueur de l'autre est 600^{m}, sa largeur totale 12^{m}, et la largeur de chacun de ses trottoirs, 1^{m},75. On désire paver l'ensemble de ces deux rues avec des pavés de bois, dont l'épaisseur est 12^{cm}; quel sera le poids total de ces pavés sachant que le mètre cube du bois employé pèse 475^{kg}.

174. — On veut répandre de l'engrais chimique sur un terrain de $34^{m},50$ de long et de $38^{m},25$ de large, à raison de 750^{kg} à l'hectare. Quel est le poids nécessaire?

175. — La carte de l'état-major est à l'échelle du $80\,000^{e}$. Quelle est la superficie en hectares d'un terrain représenté sur la carte par un rectangle de côtés $3^{mm},5$ et $8^{mm},4$?

176. — Une brochure a 124 pages (les pages de la couverture étant numérotées comme les autres); sachant qu'une pile de 125 brochures semblables a 1 mètre de haut, on demande quelle est l'épaisseur du papier.

177. — Le titre des pièces d'argent divisionnaires étant 0,835, on demande quelle est la valeur réelle de l'argent contenu dans une somme de 100^{fr} en monnaies divisionnaires, si le kilogramme d'argent pur est coté $84^{fr},75$.

178. — Les titres de trois lingots d'argent et de cuivre sont respectivement, 0,900; 0,850; 0,675; le poids du second est les $\frac{3}{4}$ du poids du premier, et le poids du troisième est les $\frac{5}{8}$ du poids du second. On demande de calculer ces poids sachant que les lingots renferment ensemble 1^{kg} d'argent pur.

179. — Un nombre de 4 chiffres est carré parfait; trouver ces 4 chiffres sachant que les deux premiers sont égaux, ainsi que les deux derniers [1].

180. — Trouver un nombre de 6 chiffres carré parfait, sachant qu'il s'écrit

$$aa\ bc\ bc$$

a, *b*, *c*, étant trois chiffres différents tels que l'on ait :

$$a = b + c.$$

181. — Trouver tous les nombres de 6 chiffres carrés parfaits, qui s'écrivent *aa bc bc*, *a*, *b*, *c* étant trois chiffres différents.

182. — Trouver les nombres de 6 chiffres carrés par-

---

1. Les Exercices 179 à 189 se traitent par des tâtonnements que l'on peut abréger notablement en utilisant les théorèmes élémentaires de divisibilité. Plusieurs d'entre eux présentent d'ailleurs d'assez réelles difficultés et ne sont pas destinés à des débutants.

faits, qui s'écrivent $aa\,bc\,bc$, a, b, c étant trois chiffres différents ou non.

183. — Trouver un nombre de 6 chiffres carré parfait, sachant qu'il s'écrit

$$ab\,abac$$

a, b, c étant trois chiffres consécutifs.

184. — Trouver un nombre de 8 chiffres carré parfait, sachant qu'il s'écrit $ab\,ab\,06\,ab$, a et b étant deux chiffres différents.

185. — Trouver un nombre de 8 chiffres carré parfait, sachant qu'il s'écrit

$$ab\,aa\,ac\,aa$$

et que l'on a :

$$b = a + 3 \qquad c = a + 1.$$

186. — Trouver un nombre de 6 chiffres carré parfait, sachant qu'il s'écrit

$$ab\,ac\,ab$$

et que l'on a :

$$b = 2c.$$

187. — Trouver un nombre de 8 chiffres carré parfait, sachant qu'il s'écrit

$$ab\,ab\,cd\,cd$$

et que l'on a :

$$a = 4c$$
$$d = b + 1.$$

188. — Trouver un nombre de 8 chiffres carré parfait, sachant qu'il s'écrit

$$ab\,ac\,ab\,ad$$

et que l'on a :

$$d = b + 1$$
$$c = b + 3.$$

189. — Trouver deux nombres entiers consécutifs dont les carrés s'écrivent respectivement

$$aaa\,a\,b\,b\,b\,c$$
$$aaammmmb$$

a, b, c, m désignant 4 chiffres différents.

TABLE DES MATIÈRES

E. GREVIN — IMPRIMERIE DE LAGNY

